详细解答

STEP III 2024，第 1 题

纯数学 · 裂项相消级数

STEP III 2024，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

这里每一个和都用同一方法处理：先把每项拆成部分分式（partial fractions），找出其中属于 $1/r^2$ 倍数的部分（它们加起来是 S_N 的倍数），再把其余部分整理成 $f(r)-f(r+1)$ 形式的差，这些差会裂项相消（telescope）。全程只处理到 N 为止的有限和，到最后每一部分都有已知极限时，才让 $N\to\infty$。

解答

第 (i) 部分

以 $r^2(r+1)$ 为公分母，

$$\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}=\frac{r^2-r(r+1)+(r+1)}{r^2(r+1)}=\frac{r^2-r^2-r+r+1}{r^2(r+1)}=\frac{1}{r^2(r+1)},$$

得证。

现在由 $r=1$ 加到 N。各 $1/r^2$ 项之和为 S_N，其余两项则裂项相消：

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r}\right)=\left(\tfrac{1}{2}-1\right)+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{N+1}-\tfrac{1}{N}\right)=\frac{1}{N+1}-1.$$

因此

$$\sum_{r=1}^{N}\frac{1}{r^2(r+1)}=S_N-1+\frac{1}{N+1}.$$

当 $N\to\infty$ 时，$S_N\to\frac{1}{6}\pi^2$ 而 $\frac{1}{N+1}\to 0$，所以右方趋于 $\frac{1}{6}\pi^2-1$。按定义，无穷和就是部

分和（partial sums）的极限，所以

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)} = \tfrac{1}{6}\pi^2 - 1.$$

第 (ii) 部分

设

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r+1} + \frac{D}{r+2}.$$

两边乘以 $r^2(r+1)(r+2)$，并使用遮盖法（cover-up rule）：代入 $r=0$ 得 $B = \frac{1}{2}$；$r=-1$ 得 $C = \frac{1}{(-1)^2\cdot 1} = 1$；$r=-2$ 得 $D = \frac{1}{4\cdot(-1)} = -\frac{1}{4}$。当 r 很大时，左方的数量级为 $1/r^4$，所以右方各 $1/r$ 项必须互相抵消：$A + C + D = 0$，得 $A = -\frac{3}{4}$。所以

$$\frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{1}{2r^2} - \frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)}.$$

? **想一想** $-\frac{3}{4r}$、$\frac{1}{r+1}$、$-\frac{1}{4(r+2)}$ 这三项看来不像单一个可裂项相消的差。怎样才能令它们裂项相消？

把中间的系数拆成 $1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$，使每一部分都可与相邻的项配对：

$$-\frac{3}{4r} + \frac{1}{r+1} - \frac{1}{4(r+2)} = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right).$$

现在每个括号都会裂项相消：

$$\sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}, \qquad \sum_{r=1}^{N}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}.$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} &= \tfrac{1}{2}S_N - \tfrac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{N+2}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}S_N - \frac{5}{8} + \frac{3}{4(N+1)} - \frac{1}{4(N+2)}.\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$，最后两项趋于 0，而 $S_N \to \frac{1}{6}\pi^2$，所以

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)(r+2)} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{5}{8}.$$

第 (iii) 部分

目标式的右方有 $\frac{2}{r^2(r+1)}$，所以比较这两项。利用第 (i) 部分，

$$\frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{2}{r+1} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r^2}.$$

另一方面，

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r(r+1)} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{2}{r} + \frac{2}{r+1},$$

其中两步都用了 $\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} = \frac{1}{r(r+1)}$。相减得

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} - \frac{2}{r^2(r+1)} = \frac{1}{(r+1)^2} - \frac{1}{r^2},$$

即

$$\frac{1}{r^2(r+1)^2} = \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+1)^2}\right).$$

想一想 为甚么不直接把无穷级数逐项相加?

只有在知道每一部分都收敛（converge）之后，重新排列无穷和才是安全的，所以我们先加到 N。括号部分裂项相消：

$$\sum_{r=1}^{N} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{N} \frac{2}{r^2(r+1)} - \left(1 - \frac{1}{(N+1)^2}\right).$$

由第 (i) 部分，当 $N \to \infty$ 时右方第一个和收敛（至 $2(\frac{1}{6}\pi^2 - 1)$），而 $\frac{1}{(N+1)^2} \to 0$。所以左方亦收敛，并且

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^2(r+1)^2} = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{r^2(r+1)} - 1,$$

得证。两边都等于 $\frac{1}{3}\pi^2 - 3$。

验算

- 在第 (ii) 部分取 $N = 1$: 和只有一项 $\frac{1}{6}$，而公式给出 $\frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{3}{8} - \frac{1}{12} = \frac{12-15+9-2}{24} = \frac{1}{6}$。
- 数值上，$\frac{1}{6}\pi^2 - 1 \approx 0.644934$，$\frac{1}{12}\pi^2 - \frac{5}{8} \approx 0.197467$，$\frac{1}{3}\pi^2 - 3 \approx 0.289868$。用电脑把每个级数的首一百万项相加，三个数值都至少准确到小数点后九位。
- 三个部分中的有限恒等式，已用有理数运算对 N 直至 59 的每一个值逐一精确核实。

常见错误

- 弄错裂项相消和的首尾项，尤其是 $\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}$ 的和，它由 $\frac{1}{2}$ 开始，而不是 1。
- 拆成像 $\sum \frac{1}{r}$ 这样各自发散（diverge）的无穷级数，而不是把调和型（harmonic-type）的部分放在有限和中一并处理。

STEP 之外

$\sum 1/r^2 = \pi^2/6$ 这个值是欧拉（Euler）对巴塞尔问题（Basel problem）的解答，在大学里通常用傅里叶级数（Fourier series）或 $\sin x$ 的乘积公式来证明。这里对有限和的小心处理，正是分析学（analysis）课程要严格化的内容：级数就是其部分和的极限，收敛级数的和可以合并，发散级数则不可以。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）正是这样处理级数的，很适合作为下一本读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。