详细解答

STEP II 2024，第 9 题

力学 • 抛体运动

STEP II 2024，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

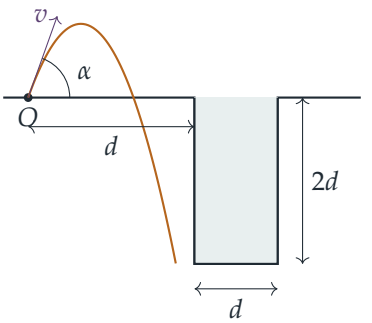
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

一切都由轨迹方程（trajectory equation）$y = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2v^2}\sec^2\alpha$ 推出，把它写成以 $t = \tan\alpha$ 为变量的二次式（quadratic）。要干净利落地落在沟底，意味着两件事：质点到达近边时仍在地面之上；而在它本应到达对面一侧之前，已经低于沟底的水平。每个条件都是关于 t 的二次不等式（quadratic inequality），而配方（completing the square）可把它们化成所需的形式。第 (ii) 部分则只需证明 t 的两个容许范围有重叠。

解答

把质点视为只受重力作用的点状抛射体（projectile），不计空气阻力（air resistance）。取抛射点为原点，x 沿水平方向指向沟渠，y 竖直向上。于是近壁是直线 $x = d$，远壁是 $x = 2d$，而沟底是 $y = -2d$，其中 $d < x < 2d$。



在时刻 T，水平速度为 $v\cos\alpha$，竖直速度为 $v\sin\alpha - gT$，消去 T 得

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha} = xt - \frac{x^2(1+t^2)}{2\lambda d},$$

其中 $t = \tan\alpha$，并用了 $v^2 = \lambda dg$ 及 $\sec^2\alpha = 1 + t^2$。

第 (i)(a) 部分

要避免在沟渠前撞到地面或撞到近壁，质点在 $x = d$ 时必须仍严格高于地面。（若它在该处位于 $y = 0$ 或以下，它便已撞到地面，或将撞上近壁。）所以

$$y(d) = dt - \frac{d(1+t^2)}{2\lambda} > 0 \iff 2\lambda t - 1 - t^2 > 0 \iff t^2 - 2\lambda t + \lambda^2 < \lambda^2 - 1,$$

这里乘以了 $2\lambda/d > 0$。即

$$(\tan\alpha - \lambda)^2 < \lambda^2 - 1,$$

此即所求。左边是平方，所以 $\lambda^2 - 1 > 0$；由于 $\lambda = v^2/(dg) > 0$，得 $\lambda > 1$。

第 (i)(b) 部分

现在考虑远壁。路径是一条开口向下的抛物线（parabola），在 $x = d$ 时高于沟底水平 $-2d$。它在 $x = 2d$ 之前到达 $y = -2d$（即沟底），当且仅当它在 $x = 2d$ 时已低于该水平，即 $y(2d) < -2d$。反之若 $y(2d) \geq -2d$，它到达 $x = 2d$ 时仍未触及沟底，因此会碰到远壁（或者整条沟渠都飞越过去）。

> ? **想一想** 为甚么只看 $x = 2d$ 这一点就足够?

因为 $y(x) + 2d$ 是关于 x 的二次式，首项系数（leading coefficient）为负，且在 $x = d$ 时为正。它在 $x = d$ 之后恰有一个根（root），而这个根位于 $2d$ 之前，当且仅当该二次式在 $x = 2d$ 时已经为负。

所以我们需要

$$y(2d) = 2dt - \frac{4d^2(1+t^2)}{2\lambda d} < -2d \iff \lambda t - (1+t^2) < -\lambda \iff t^2 - \lambda t + 1 - \lambda > 0,$$

这里乘以了 $\lambda/(2d) > 0$。乘以 4 再配方，

$$4t^2 - 4\lambda t + \lambda^2 > \lambda^2 - 4 + 4\lambda, \qquad \text{即} \qquad (2\tan\alpha - \lambda)^2 > \lambda^2 + 4(\lambda - 1),$$

此即所求。

推出 $\alpha > 45°$。由 (a)，$\lambda > 1$，所以 $\lambda^2 + 4(\lambda - 1) > \lambda^2 > 0$。记 $s = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}$，则 $s > \lambda$。(b) 中的不等式表示

$$2t > \lambda + s \qquad \text{或} \qquad 2t < \lambda - s.$$

由于 $s > \lambda$，第二种情况给出 $t < 0$。但 (a) 迫使 $t > 0$：由 $(t-\lambda)^2 < \lambda^2 - 1 < \lambda^2$ 得 $|t-\lambda| < \lambda$，所以 $t > 0$。（从物理上看，质点必须上升才能越过近边。）因此第一种情况成立，并且

$$2t > \lambda + s > \lambda + \lambda = 2\lambda > 2,$$

所以 $\tan\alpha > \lambda > 1$。由于 $0 < \alpha < 90°$，得 $\alpha > 45°$。

第 (ii) 部分

反过来，两个条件合起来已经足够。若 $y(d) > 0$，由于 $y(0) = 0$ 且 y 是凹函数（concave），在整个区间 $0 < x \le d$ 上都有 $y > 0$，所以质点越过地面和近壁。若同时 $y(2d) < -2d$，它会在严格介乎 d 与 $2d$ 之间的某个 x 到达沟底，而在此之前一直留在沟渠之内。所以我们只需证明：对每个 $\lambda > 1$，存在某个 $t > 0$ 同时满足两个不等式。

由 (a)，容许值为 $\lambda - \sqrt{\lambda^2-1} < t < \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$。由 (b) 连同 $t > 0$，容许值为 $t > \frac{1}{2}(\lambda + s)$。两者对某个 t 同时成立，只要

$$\tfrac{1}{2}(\lambda + s) < \lambda + \sqrt{\lambda^2-1} \iff s < \lambda + 2\sqrt{\lambda^2-1}.$$

（(a) 的下界不会造成麻烦，因为 $\frac{1}{2}(\lambda+s) > \lambda > \lambda - \sqrt{\lambda^2-1}$。）两边皆为正，所以可以平方：

$$\begin{aligned} &\lambda^2 + 4\lambda - 4 < \lambda^2 + 4\lambda\sqrt{\lambda^2-1} + 4(\lambda^2-1) \\ \iff\quad &4\lambda < 4\lambda\sqrt{\lambda^2-1} + 4\lambda^2 \\ \iff\quad &1 < \sqrt{\lambda^2-1} + \lambda, \end{aligned}$$

这里除以了 $4\lambda > 0$。由于 $\lambda > 1$，最后一行成立。所以区间

$$\tfrac{1}{2}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda - 4}\right) < \tan\alpha < \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$$

是非空的（non-empty）。选取 α 使 $\tan\alpha$ 落在其中（这是可行的，因为 tan 在 $(0°, 90°)$ 上取遍所有正值），质点便会落在沟底而不碰到任何一侧。

验算

- 取 $\lambda = 2$。区间为 $1 + \sqrt{2} < \tan\alpha < 2 + \sqrt{3}$，恰好是 $67.5° < \alpha < 75°$。把 $\alpha = 70°$ 代入 $y = xt - x^2(1+t^2)/(4d)$，得 $y(d) \approx 0.61d > 0$ 及 $y(2d) \approx -3.05d < -2d$，与预期相符。
- 当 $\lambda \to 1^+$ 时，区间两端都趋于 1，所以可行范围收缩至 $\alpha = 45°$：当 $v^2 = dg$ 时，质点只能勉强到达近边，这需要最大射程（maximum range）的角度。
- 用电脑随机检验数以千计的 (λ, α) 组合，按时间逐步推进运动，结果在每一种情况下都与两个不等式吻合。

常见错误

- 把条件当成 $y(d) > -2d$（高于沟底）而非 $y(d) > 0$：近壁一直延伸到地面高度。
- 在 (b) 中忘记排除 $2\tan\alpha < \lambda - s$ 这一支，而这需要用到 $\tan\alpha > 0$。
- 在 (ii) 中未先指出两边皆为正便把不等式平方。

STEP 之外

这里一个物理条件（“落在沟渠内”）变成了发射参数空间中由不等式所围出的一个区域，而问题在于该区域是否非空。这正是最佳化（optimisation）与控制（control）的起点：描述可行（feasible）输入的集合，并找出其边界。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以大学一年级程度讨论抛射运动及其延伸（空气阻力、旋转参考系）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。