详细解答

STEP II 2024，第 8 题

纯数学 · 算术几何平均

STEP II 2024，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 2.6 节算术几何平均中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/agm.html

关键思路

两个数列互相夹近：算术平均数逐步下降，几何平均数逐步上升，而两者之差每次至少减半，所以两个数列都趋于同一个极限 M，即 x_0 与 y_0 的算术—几何平均数（arithmetic–geometric mean）。在第 (ii) 部分，代换（substitution）把数对 (p,q) 的积分变成这两个数的平均数所成数对的积分，所以在整个迭代过程中积分的值始终不变。令 $n \to \infty$，积分便化为一个我们能够计算的积分。

解答

第 (i) 部分

首先用归纳法（induction）证明对每个 n 都有 $0 < y_n < x_n$。当 $n = 0$ 时成立。假设 $0 < y_n < x_n$，则 $\sqrt{x_n} \neq \sqrt{y_n}$，所以

$$0 < \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}\right)^2 = x_n + y_n - 2\sqrt{x_n y_n},$$

整理得 $\frac{1}{2}(x_n + y_n) > \sqrt{x_n y_n}$，即 $y_{n+1} < x_{n+1}$。此外 $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > 0$。归纳法至此完成，所以对所有 $n \geq 0$ 都有 $y_{n+1} < x_{n+1}$。

利用 $y_n < x_n$：

$$x_{n+1} = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) < \tfrac{1}{2}(x_n + x_n) = x_n,$$
$$y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{y_n y_n} = y_n,$$

其中第二行用到 $x_n > y_n > 0$ 以及平方根是递增函数这一事实。

所以 (y_n) 是递增数列，而且有上界（bounded above）：$y_n < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0$，所以对所有 n 都有 $y_n < x_0$。根据该定理，存在某个 $M \le x_0$ 使得 $y_n \to M$。（由于数列从 y_0 开始递增，亦有 $M \ge y_0 > 0$。）

至于两者之差，左边的不等式 $x_{n+1} - y_{n+1} > 0$ 正是我们最先证明的结果。至于右边的不等式，由于 $y_{n+1} > y_n$，

$$x_{n+1} - y_{n+1} < x_{n+1} - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n + y_n) - y_n = \tfrac{1}{2}(x_n - y_n).$$

反复应用此式，得

$$0 < x_n - y_n < \frac{x_0 - y_0}{2^n} \to 0,$$

所以由夹逼原理（squeezing）得 $x_n - y_n \to 0$。最后，$x_n = y_n + (x_n - y_n)$ 是一个趋于 M 的数列与一个趋于 0 的数列之和，所以 $x_n \to M$ 亦成立。

第 (ii) 部分

记 $a = \tfrac{1}{2}(p+q)$、$g = \sqrt{pq}$，并把关于 t 的积分记作 J。

代换。对 $x > 0$，令 $t = \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{pq}{x}\right)$，则

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{pq}{x^2}\right) = \frac{x^2 + pq}{2x^2} > 0,$$

所以 t 严格递增，当 $x \to 0^+$ 时趋于 $-\infty$，当 $x \to \infty$ 时趋于 $+\infty$：此代换把 $(0,\infty)$ 一一对应（one-to-one）地映射到整条实数线上。现在改写根号内的两个因子。

$$pq + t^2 = \tfrac{1}{4}\left(x^2 + 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{pq}{x}\right)^2 = \left(\frac{x^2 + pq}{2x}\right)^2,$$
$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}(p+q)^2 + t^2 &= \tfrac{1}{4}\left(p^2 + 2pq + q^2 + x^2 - 2pq + \frac{p^2q^2}{x^2}\right)\\ &= \frac{x^4 + (p^2+q^2)x^2 + p^2q^2}{4x^2} = \frac{(x^2+p^2)(x^2+q^2)}{4x^2}.\end{aligned}$$

由于 $x > 0$ 且 $x^2 + pq > 0$，两者乘积的平方根为

$$\frac{x^2 + pq}{2x} \cdot \frac{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}{2x}.$$

因此

$$J = \int_0^\infty \frac{x^2+pq}{2x^2}\cdot\frac{4x^2}{(x^2+pq)\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(p^2+x^2)(q^2+x^2)}} = 2\,\mathrm{I}(p,q).$$

直接解读同一个积分。 由于 $\frac{1}{4}(p+q)^2 = a^2$ 及 $pq = g^2$，J 的被积函数（integrand）是 $1/\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}$，它是 t 的偶函数（even function）。所以

$$J = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(g^2+t^2)}} = 2\,\mathrm{I}(a,g),$$

这样做是合理的，因为 a、g 均为正数且 $g < a$（由于 $p \neq q$，这由第 (i) 部分的不等式得出）。比较 J 的两个表达式，得

$$\mathrm{I}(p,q) = \mathrm{I}\big(\mathrm{a}(p,q),\mathrm{g}(p,q)\big),$$

此即所求。

计算 $\mathrm{I}(x_0,y_0)$。取 $(p,q) = (x_n,y_n)$ 应用上式（由于 $0 < y_n < x_n$，这是容许的），得 $\mathrm{I}(x_n,y_n) = \mathrm{I}(x_{n+1},y_{n+1})$，所以

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \mathrm{I}(x_n,y_n) \quad \text{对每个} n.$$

> **想一想** 我们想令 $n \to \infty$，并说积分趋于 $\mathrm{I}(M,M)$。在无穷区间上的积分，怎样才能合理地把极限移到积分号之内?

我们用夹逼的方法，避开任何微妙的极限论证。对 $0 < y_n < x_n$ 及每个 x，

$$(y_n^2+x^2)^2 \le (x_n^2+x^2)(y_n^2+x^2) \le (x_n^2+x^2)^2,$$

所以取平方根再取倒数（这会令不等号反向），然后积分，得

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x_n^2+x^2} \le \mathrm{I}(x_n,y_n) \le \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{y_n^2+x^2}.$$

对 $c > 0$，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{c^2+x^2} = \Big[\frac{1}{c}\arctan\frac{x}{c}\Big]_0^\infty = \frac{\pi}{2c}$，所以

$$\frac{\pi}{2x_n} \le \mathrm{I}(x_0,y_0) \le \frac{\pi}{2y_n} \quad \text{对每个} n.$$

中间一项不随 n 改变，而由于 $x_n \to M$、$y_n \to M$ 且 $M > 0$，上下两界都趋于 $\pi/(2M)$。因此

$$\mathrm{I}(x_0,y_0) = \frac{\pi}{2M}.$$

验算

- 取 $x_0 = 2$、$y_0 = 1$。迭代得 $(1.5,\ 1.41421)$，然后是 $(1.45711,\ 1.45648)$，再下一步两者在五位有效数字内一致，即 $M \approx 1.45679$。所以 $\pi/(2M) \approx 1.07826$，而用数值方法计算 $\mathrm{I}(2,1)$ 亦得 1.07826。
- 若 $p = q$，则恒等式显然成立，因为此时 $\mathrm{a}(p,p) = \mathrm{g}(p,p) = p$。答案 $\pi/(2M)$ 与此吻合，因为 $\mathrm{I}(M,M) = \pi/(2M)$。
- 收敛速度极快：最初几步之后，两者之差大约每次平方一次，远比我们证明的减半要好。

常见错误

- 在归纳法中使用 $y_{n+1} < x_{n+1}$，却没有先确立 $y_n < x_n$（以及 $y_n > 0$，使平方根有意义）。
- 忘记关于 t 的积分是在整条实数线上进行，因此等于 $\mathrm{I}(a,g)$ 的*两倍*；两个因子 2 必须互相抵消。
- 毫无理据地写出 $\mathrm{I}(x_n,y_n) \to \mathrm{I}(M,M)$。上面的夹逼论证提供了一个可靠的理由。

STEP 之外

共同极限 M 就是高斯（Gauss）的算术—几何平均数，而积分 I 是一个*完全椭圆积分*（complete elliptic integral）：高斯在 1799 年发现了这个恒等式，它提供了一种快得惊人的方法来计算椭圆积分，甚至可以计算 π 本身（高斯—勒让德算法（Gauss–Legendre algorithm））。开头引用的单调收敛定理（monotone convergence theorem），以及交换极限与积分次序时所需的谨慎，都是大学第一门分析（analysis）课程的核心主题；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是正式认识这些内容的绝佳起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。