详细解答

STEP II 2024，第 7 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP II 2024，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

每个括号都是一个圆的方程，所以 C_1 不过是两个圆。至于 C_2，把括号展开后，所有项都会归结为 x^2+y^2 和 x^2，因此用一条水平直线去截它，就会得到一个关于 x^2 的二次方程（quadratic）。于是计算交点数目就变成计算这个二次方程有多少个正根，而这只需结合判别式（discriminant）、两根之和与两根之积便可确定。

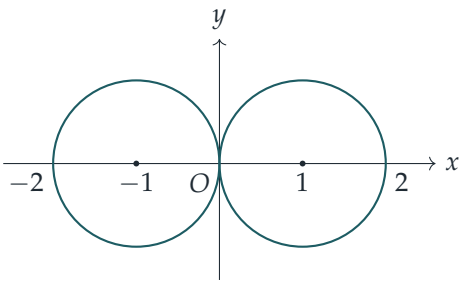
解答

全题中记

$$A = y^2+(x-1)^2-1 = x^2+y^2-2x, \qquad B = y^2+(x+1)^2-1 = x^2+y^2+2x.$$

第 (i) 部分

一个乘积等于零，当且仅当其中一个因子等于零，所以 C_1 是圆 $A=0$ 与圆 $B=0$ 的并集（union）。这两个圆的半径都是 1，圆心分别在 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$。两圆都经过原点，并在原点相切（它们在该处的公切线（tangent）是 y 轴）。曲线的最高点是 $(\pm 1,1)$，与 x 轴相交于 $x=-2,0,2$。



第 (ii)(a) 部分

由于 A 和 B 分别具有 $s-2x$ 和 $s+2x$ 的形式，其中 $s=x^2+y^2$，故

$$AB=(x^2+y^2)^2-4x^2.$$

在直线 $y=k$ 上，方程 $AB=\frac{1}{16}$ 变为

$$\begin{aligned}(x^2+k^2)^2-4x^2&=\tfrac{1}{16}\\ x^4+2k^2x^2+k^4-4x^2-\tfrac{1}{16}&=0\\ x^4+2(k^2-2)x^2+\left(k^4-\tfrac{1}{16}\right)&=0,\end{aligned}$$

此即所求。

现在设 $u=x^2$，得

$$u^2+2(k^2-2)u+\left(k^4-\tfrac{1}{16}\right)=0. \qquad (*)$$

每个根 $u>0$ 给出两个交点 $x=\pm\sqrt{u}$；根 $u=0$ 给出一个交点（$x=0$）；根 $u<0$ 则不给出任何交点。所以我们需要知道 $(*)$ 各根的正负号。以下三个量可以告诉我们：

- 四分之一判别式（quarter-discriminant）$(k^2-2)^2-\left(k^4-\frac{1}{16}\right)=\frac{65}{16}-4k^2$，当 k 小于、等于或大于 $\frac{\sqrt{65}}{8}$ 时，它分别为正、零或负；
- 两根之和 $2(2-k^2)$；
- 两根之积 $k^4-\frac{1}{16}$，当 $k>0$ 时，它与 $k-\frac{1}{2}$ 同号。

注意 $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{65}}{8}\approx 1.008$，而且只要两根是实数，就有 $k^2\le\frac{65}{64}<2$，所以两根之和为正。

> ? **想一想** 如果两根之积为负，我们还需要检查判别式吗？

不需要：两根之积为负，必然迫使两根为实数（此时判别式 b^2-4ac 为正）且一正一负。现在逐一考虑各种情况。

- $0<k<\frac{1}{2}$：两根之积为负，所以恰有一个正根。**2 个交点**。

- $k = \frac{1}{2}$：$(*)$ 变为 $u^2 - \frac{7}{2}u = 0$，所以 $u = 0$ 或 $u = \frac{7}{2}$，得 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{7/2}$。**3 个交点**。
- $\frac{1}{2} < k < \frac{\sqrt{65}}{8}$：判别式为正，所以有两个相异实根。它们的积与和都是正数，所以两根皆为正。**4 个交点**。
- $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$：有一个重根（repeated root）$u = 2 - k^2 = \frac{63}{64} > 0$，得 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$。**2 个交点**。
- $k > \frac{\sqrt{65}}{8}$：没有实根。**没有交点**。

第 (ii)(b) 部分

由 (a) 可知，当 $0 < k \leq \frac{\sqrt{65}}{8}$ 时，直线 $y = k$ 与 C_2 相交，而 k 更大时则不相交。C_2 的方程只通过 y^2 涉及 y，所以负的 k 不会给出更高的点。因此 C_2 上最大的 y 坐标是 $\frac{\sqrt{65}}{8}$，在 $x = \pm\frac{\sqrt{63}}{8}$ 处取得。

在 C_1 上，最高点是两个圆的顶点 $(\pm 1, 1)$。由于 $\frac{\sqrt{63}}{8} < \frac{\sqrt{64}}{8} = 1$，$C_2$ 的最高点比 C_1 的最高点**更接近 y 轴**（不过稍为高一点，因为 $\frac{\sqrt{65}}{8} > 1$）。

第 (ii)(c) 部分

假设 $A < 0$ 且 $B < 0$。由 $A < 0$ 得 $2x > x^2 + y^2 \geq 0$，所以 $x > 0$。由 $B < 0$ 得 $-2x > x^2 + y^2 \geq 0$，所以 $x < 0$。两者互相矛盾，所以 A 和 B 不可能同时为负。（从几何上看，两个开圆盘（open discs）互不重叠。）

在 C_2 上有 $AB = \frac{1}{16} > 0$，所以 A 和 B 都不为零，且同号。它们不可能同时为负，所以两者皆为正。$A > 0$ 表示 $(x-1)^2 + y^2 > 1$，即该点严格位于以 $(1, 0)$ 为圆心的圆之外。同理，$B > 0$ 表示该点严格位于以 $(-1, 0)$ 为圆心的圆之外。因此 C_2 上每一点都位于两个圆之外：C_2 完全位于 C_1 之外。

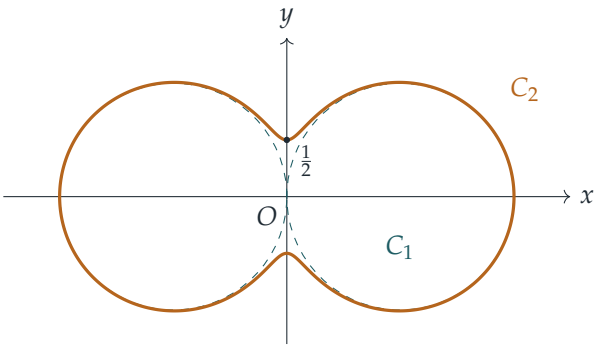
第 (ii)(d) 部分

有助描绘 C_2 的特征：

- 由于方程中只出现 x^2 和 y^2，曲线关于两条坐标轴都对称（symmetric）。
- 在 $y = 0$ 上，$(*)$ 给出 $u = 2 + \frac{\sqrt{65}}{4}$，所以 C_2 与 x 轴相交于 $x = \pm\sqrt{2 + \frac{\sqrt{65}}{4}} \approx \pm 2.004$，刚好在 ± 2 之外。
- 在 $x = 0$ 上，$k^4 = \frac{1}{16}$，所以 C_2 与 y 轴相交于 $(0, \pm\frac{1}{2})$。
- 它的最高点和最低点是 $\left(\pm\frac{\sqrt{63}}{8}, \pm\frac{\sqrt{65}}{8}\right) \approx (\pm 0.99, \pm 1.01)$。

(a) 中的交点数目揭示了曲线的形状。当 $|y| < \frac{1}{2}$ 时只有两个交点（外侧两边）。当 $\frac{1}{2} <$

$|y| < \frac{\sqrt{65}}{8}$ 时有四个交点，所以曲线在两个隆起之间向下凹至 $(0, \pm\frac{1}{2})$。因此 C_2 是一条包围两个圆的单一闭合“花生形”曲线，在 y 轴处向内收窄。



（把 C_2 写成极坐标形式（polar form），得 $r^2 = 2\cos^2\theta + \sqrt{4\cos^4\theta + \frac{1}{16}}$，上图的曲线正是这样画出来的。）

验算

- 当 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$ 时，判别式 $\frac{65}{16} - 4k^2$ 等于零，与曲线的顶部吻合。重根 $u = \frac{63}{64}$ 给出 $x^2 + y^2 = \frac{128}{64} = 2$ 及 $4x^2 = \frac{63}{16}$，而 $2^2 - \frac{63}{16} = \frac{1}{16}$ 确实成立。
- 点 $(0, \frac{1}{2})$：$A = B = \frac{1}{4}$，所以 $AB = \frac{1}{16}$。
- 用电脑计算 $y = k$ 与 C_2 的交点数目，对于 $k = 0.1$、0.49、0.51、1.0、1.007 和 1.01，分别得到 2、2、4、4、4 和 0 个交点；而数值搜索得出最大高度为 $1.00778 \approx \frac{\sqrt{65}}{8}$，位于 $x \approx 0.9922 \approx \frac{\sqrt{63}}{8}$。

常见错误

- 把 $u = 0$ 当作给出两个交点：$x = \pm\sqrt{0}$ 只是一个点，这就是为甚么 $k = \frac{1}{2}$ 给出 3 个交点而不是 4 个。
- 计算交点数目时遗漏了相切（tangency）的情况 $k = \frac{\sqrt{65}}{8}$。
- 在 (c) 中只得出“A 和 B 同号”，而没有排除两者同时为负的情况——而这正是前半部分的重点所在。

STEP 之外

C_2 属于曲线族 $(x^2+y^2)^2-4x^2=c$，即函数 AB 的等值曲线（level curves）。随着 c 增大，曲线的形状会改变：先是两个位于圆内的独立卵形（当 $c<0$），然后在 $c=0$ 时成为 8 字形（figure-of-eight）曲线 C_1，之后成为单一的花生形，而当 $c\geq 4$ 时其凹陷便会消失。拓扑（topology）的改变恰好发生在 AB 于原点的临界点（critical point）所对应的水平上。追踪等值曲线在经过临界点时如何变化，正是莫尔斯理论（Morse theory）的出发点；而与此密切相关的卡西尼卵形线（Cassini ovals）——其 8 字形成员就是伯努利双纽线（lemniscate of Bernoulli）——也有完全相同的表现。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）收录了更多类似 STEP 风格、描绘这类隐函数曲线（implicit curves）的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。