详细解答

STEP II 2024，第 6 题

纯数学 · 二项式级数的系数

STEP II 2024，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

每一部分都靠相邻项之比（ratio of successive terms）推动。二项式系数（binomial coefficient）$\binom{2n}{n}$ 和二项级数（binomial series）的系数都是乘积，每走一步便多乘一个因子，所以把第 n 项与第 $(n-1)$ 项比较，就得到一条简短的递推关系（recurrence）。两个数列若服从同一条递推关系，而且首项相同，它们便相等。最后的恒等式则来自把 $(1-x)^{-3/2}$ 写成 $(1-x)^{-1/2}\times(1-x)^{-1}$ 并比较系数（comparing coefficients），因为乘以 $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots$ 会把一列系数变成它的累计和。

解答

第 (i) 部分

设 $P(n)$ 为命题 $T_n=\dfrac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$。

基本情况（*base case*）。$P(0)$ 成立，因为 $\frac{1}{2^0}\binom{0}{0}=1=T_0$。

归纳步骤（*inductive step*）。假设对某个 $n\geq 1$，$P(n-1)$ 成立。由于 $\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$ 及 $\binom{2n-2}{n-1}=\dfrac{(2n-2)!}{(n-1)!\,(n-1)!}$，两者相除得

$$\binom{2n}{n}=\frac{(2n)(2n-1)}{n\cdot n}\binom{2n-2}{n-1}=\frac{2(2n-1)}{n}\binom{2n-2}{n-1}.$$

于是，利用递推关系及 $P(n-1)$，

$$\begin{aligned} T_n = \frac{2n-1}{2n}\,T_{n-1} &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\binom{2n-2}{n-1} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2^{2n-2}}\cdot\frac{n}{2(2n-1)}\binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{4\cdot 2^{2n-2}}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}, \end{aligned}$$

这正是 $P(n)$。由归纳法（induction），$P(n)$ 对所有 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 皆成立。

第 (ii) 部分

由一般指数的二项式定理（binomial theorem for a general index），$(1-x)^{-1/2}$ 中 x^r 的系数为

$$a_r = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-r+1\right)}{r!}\,(-1)^r = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{r!},$$

因为分子中 r 个因子各自为负，而 $(-x)^r$ 带来的 $(-1)^r$ 正好抵消这些符号。由 a_{r-1} 到 a_r，分子多了一个因子 $\frac{2r-1}{2}$，分母多了一个因子 r，所以当 $r \geq 1$ 时

$$\frac{a_r}{a_{r-1}} = \frac{(2r-1)/2}{r} = \frac{2r-1}{2r}, \qquad \text{即} \qquad a_r = \frac{2r-1}{2r}\,a_{r-1}.$$

> ? **想一想** 为甚么这条递推关系能立即推出 $a_r = T_r$?

两个数列的首项都是 1（因为常数项 $a_0 = 1$，而 $T_0 = 1$），而且由第 $r-1$ 项到第 r 项遵从同一规则。一行归纳便能完成：若 $a_{r-1} = T_{r-1}$，则 $a_r = \frac{2r-1}{2r}a_{r-1} = \frac{2r-1}{2r}T_{r-1} = T_r$。所以对所有 $r \geq 0$ 都有 $a_r = T_r$，再由 (i)，

$$a_r = \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}.$$

第 (iii) 部分

同样地，$(1-x)^{-3/2}$ 中 x^r 的系数为

$$b_r = \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r+1}{2}}{r!}.$$

a_r 与 b_r 的分子都是 r 个连续“半奇数”的乘积。b_r 的乘积少了 a_r 的第一个因子 $\frac{1}{2}$，而在末端多了一个因子 $\frac{2r+1}{2}$。$r!$ 互相约去，所以

$$\frac{b_r}{a_r} = \frac{(2r+1)/2}{1/2} = 2r+1.$$

（当 $r = 0$ 时，两个乘积都是空乘积，$b_0 = a_0 = 1$，与此相符。）因此

$$b_r = (2r+1)\,a_r = \frac{2r+1}{2^{2r}}\binom{2r}{r}, \qquad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

第 (iv) 部分

由于 $(1-x)^{-3/2} = (1-x)^{-1/2}(1-x)^{-1}$，且 $(1-x)^{-1} = \sum_{s\geq 0} x^s$，

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} x^s\right).$$

在右方，x^n 项来自从第一个括号选取 $a_r x^r$、从第二个括号选取 x^{n-r}，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。每一种选法的系数都是 $a_r \cdot 1$，所以 x^n 的系数为 $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$。比较两边 x^n 的系数，

$$b_n = \sum_{r=0}^{n} a_r.$$

代入 (ii) 及 (iii) 的公式，得

$$\frac{2n+1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{2^{2r}}\binom{2r}{r},$$

即所求。（上述推导对 $n = 0$ 亦成立，此时两边都等于 1。）

验算

- 小数值情况：$a_0, a_1, a_2, a_3 = 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$，与 $\binom{2r}{r}/4^r = 1, \frac{2}{4}, \frac{6}{16}, \frac{20}{64}$ 吻合。
- 当 $n = 3$，(iv) 的左边为 $\frac{7\cdot 20}{64} = \frac{35}{16}$，右边为 $1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{5}{16} = \frac{35}{16}$。
- 直接展开，$(1-x)^{-3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{8}x^2 + \cdots$，而 $b_2 = 5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$。
- 以精确分数进行的电脑验算确认 (i)–(iv) 对每个 $n \leq 29$ 皆成立。在 $x = 0.3$ 处把两个级数各自的首 30 项相加，得 1.19523 及 1.70747，分别与 $(0.7)^{-1/2}$ 及 $(0.7)^{-3/2}$ 相符。

常见错误

- 二项式系数的符号错误：$\binom{-1/2}{r}$ 的符号正负交替，但 $(-x)^r$ 带来的因子 $(-1)^r$ 抵消了这一点，所以每个 a_r 和 b_r 都是正数。
- 忘记基本情况，或单凭递推关系便断言 $a_r = T_r$：首项 $a_0 = T_0 = 1$ 也必须相符。

STEP 之外

把幂级数（power series）乘以 $(1-x)^{-1}$ 以得出部分和（partial sums），是*生成函数*（generating functions）的基本工具；生成函数把关于数列的问题转化为幂级数的代数运算。数 $\binom{2n}{n}/4^n$ 亦出现在概率（probability）之中：它是一枚公平硬币掷 $2n$ 次恰好出现

n 次正面的概率，而斯特林公式（Stirling's formula）显示当 n 很大时，它的表现约为 $1/\sqrt{\pi n}$。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）收录更多同类题目，而 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）则有系统地发展生成函数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。