详细解答

STEP II 2024，第 5 题

纯数学 · 值域与丢番图方程

STEP II 2024，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

把多项式的自变量平移一个整数，它在 $\mathbb{Z}$ 上的值域（range）并不会改变，所以我们通过配方（completing the square）（或“配立方”）把每个函数化成最简单的平移形式。这样，问两个值域是否相交，就变成问一条含两个整数未知数的方程是否有解；而窍门在于把方程整理成*两个整数之积 = 一个固定的小数*的形式。一个小数的因数分解只有寥寥几种可能，我们可以逐一检查。

解答

第 (i) 部分

配方得

$$f_1(n) = (n+3)^2 + 2 = F_1(n+3).$$

当 n 取遍 $\mathbb{Z}$ 时，$m = n+3$ 亦然（每个整数 m 都会出现，取 $n = m-3$ 即可）。因此 f_1 的值域是 $\{m^2+2 : m \in \mathbb{Z}\}$，正好就是 F_1 的值域。这就是所要证明的。

第 (ii) 部分

同理 $g_1(n) = (n-1)^2 + 4$，故按同样的论证，g_1 的值域是 $\{k^2+4 : k \in \mathbb{Z}\}$。由第 (i) 部分，若有公共值，便需要整数 m、k 使得

$$m^2 + 2 = k^2 + 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 2.$$

由于 $m-k$ 与 $m+k$ 相差 $2k$，是偶数，所以两者奇偶性（parity）相同。若两者皆为奇数，其积为奇数，不可能等于 2。若两者皆为偶数，其积是 4 的倍数，同样不可能等于 2。因

此这样的 m、k 并不存在，两个值域的交集（intersection）为空。

第 (iii) 部分

配方得

$$\mathrm{f}_2(n) = (n-1)^2 - 7, \qquad \mathrm{g}_2(n) = (n-2)^2 - 2,$$

所以两个值域分别是 $\{m^2-7\}$ 和 $\{k^2-2\}$，其中 m、k 取遍 $\mathbb{Z}$。公共值需要

$$m^2 - 7 = k^2 - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-k)(m+k) = 5.$$

由于 5 是质数（prime），数对 $(m-k, m+k)$ 只能是 $(1,5)$、$(5,1)$、$(-1,-5)$、$(-5,-1)$ 其中之一。两个因数相加得 $2m = \pm 6$，相减得 $2k = \pm 4$，所以在每种情况下都有 $m^2 = 9$ 及 $k^2 = 4$。公共值为

$$m^2 - 7 = 9 - 7 = 2 = 4 - 2 = k^2 - 2.$$

所以同时属于两个值域的整数只有 $\boxed{2}$。验证一下：$\mathrm{f}_2(4) = \mathrm{f}_2(-2) = 2$，而 $\mathrm{g}_2(4) = \mathrm{g}_2(0) = 2$。

第 (iv) 部分

对 p 配方，

$$p^2 + pq + q^2 = \left(p + \tfrac{1}{2}q\right)^2 + \tfrac{3}{4}q^2 \geq 0,$$

因为两项都是平方乘以正常数。（等号只在 $q = 0$ 且 $p = 0$ 时成立。）

至于三次函数，我们把 f_3 与 $(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ 作比较：

$$\mathrm{f}_3(n) = (n-1)^3 + 4n + 1 = (n-1)^3 + 4(n-1) + 5.$$

所以设 $m = n - 1$（它同样取遍整个 $\mathbb{Z}$），则 f_3 的值域是 $\{m^3 + 4m + 5\}$，而 g_3 的值域是 $\{k^3 + 4k - 6\}$。公共值需要整数 m、k 使得

$$\begin{aligned} & m^3 + 4m + 5 = k^3 + 4k - 6 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k^3 - m^3) + 4(k-m) = 11 \\ \Longleftrightarrow \quad & (k-m)\left(k^2 + km + m^2 + 4\right) = 11. \end{aligned}$$

想一想 本部分开首的不等式对这条方程有甚么帮助?

在该不等式中取 $p = k$、$q = m$，便得 $k^2 + km + m^2 + 4 \geq 4$。特别地，第二个因式是正整数，所以 $k - m$ 亦必须是正数。由于 11 是质数，只有两个可能：

- $k-m=11$ 且 $k^2+km+m^2+4=1$。这不可能，因为第二个因式至少是 4。
- $k-m=1$ 且 $k^2+km+m^2+4=11$。

在第二种情况下，代入 $k=m+1$：

$$\begin{aligned}(m+1)^2+m(m+1)+m^2&=7\\ 3m^2+3m+1&=7\\ m^2+m-2=(m+2)(m-1)&=0,\end{aligned}$$

所以 $m=1$（此时 $k=2$）或 $m=-2$（此时 $k=-1$）。对应的值为

$$m=1:\ 1+4+5=10,\qquad m=-2:\ -8-8+5=-11.$$

所以同时属于两个值域的整数是 $\boxed{10\text{ 和 }-11}$。

回到原来的变量：$f_3(2)=8-12+14=10$ 而 $g_3(2)=8+8-6=10$；另外 $f_3(-1)=-1-3-7=-11$ 而 $g_3(-1)=-1-4-6=-11$。有趣的是，两个公共值都来自相同的输入 n。

验算

- 如上文般代回验证：f_2 和 g_2 在 $n=4$ 时都取值 2，而 f_3、g_3 在 $n=2$（值为 10）及 $n=-1$（值为 -11）时相等。
- 列出一些较小的值，可快速检查第 (ii) 部分是否合理：f_1 给出 $2,3,6,11,18,27,\ldots$，而 g_1 给出 $4,5,8,13,20,29,\ldots$。两个列表都没有对方的数。
- 以电脑搜索所有 $|n|\le 3000$,证实 (i) 的两个值域相同、(ii) 的两个值域不相交(disjoint)，而唯一的公共值是 (iii) 中的 2，以及 (iv) 中的 10、-11。

常见错误

- 以同一个 n 解 $f(n)=g(n)$ 来找公共值。两个输入可以不同，所以我们需要两个独立的未知数。在 (iii) 中，$f_2(n)=g_2(n)$ 碰巧给出正确答案，但方法是错的。
- 在 (ii) 中，只论证 $(m-k)(m+k)=2$ 迫使 $\{m-k,m+k\}=\{1,2\}$，却忘记了负数因数对。奇偶性论证可一次过处理所有情况。
- 在 (iv) 中，忘记排除 11×1 这个因数分解（factorisation）。正是那条不等式把它排除掉。

STEP 之外

像 $m^2 - k^2 = 5$ 和 $k^3 + 4k = m^3 + 4m + 11$ 这类只计算整数解的方程，称为*丢番图方程*（Diophantine equations）。把一边因式分解，再利用另一边的因数，是解这类方程最有力的初等工具之一。(ii) 中的奇偶性技巧可以推广：一个整数可表示为两个平方数之差，当且仅当它是奇数或 4 的倍数。若想深入了解，Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是一本极佳的大学一年级数论（number theory）入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。