详细解答

STEP II 2024，第 4 题

纯数学 · 向量与角平分线

STEP II 2024，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

把所有向量都缩放成单位向量（unit vector）。若 $\hat{\mathbf{x}}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}$ 分别是沿 OX 和 OY 方向的单位向量，那么 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ 就是一个菱形（rhombus）的对角线，而菱形的对角线平分（bisect）其所在的角。题目给出的 $\mathbf{b}$ 只不过是 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ 的正数倍，所以每个平分向量（bisecting vector）都是两个单位向量之和的正数倍。这样一来，第 (ii) 部分的点积（dot product）就会化简成同一个对称的式子。

解答

全文以 θ 表示角 XOY。由于 O、X、Y 不共线（collinear），$0<\theta<\pi$，所以

$$-1<\cos\theta<1.$$

下面两个严格不等式都会用到。

第 (i)(a) 部分

设 $\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ 及 $\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{y}/|\mathbf{y}|$，于是 $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{y}}=\cos\theta$。那么

$$\mathbf{b}=|\mathbf{x}|\mathbf{y}+|\mathbf{y}|\mathbf{x}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}).$$

这是 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 的线性组合，所以它位于平面 XOY 上。它不是零向量，因为若 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{0}$，则 $\hat{\mathbf{y}}=-\hat{\mathbf{x}}$，那就会令 O、X、Y 共线。

现在比较两个角。我们有

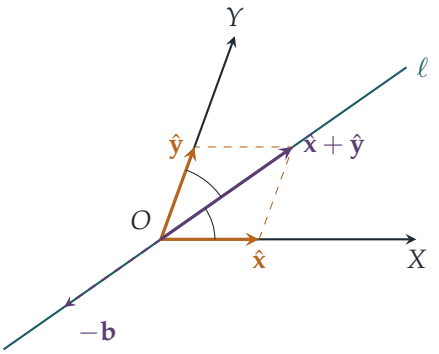
$$\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(1+\cos\theta)=\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}},$$

所以 $\mathbf{b}$ 与 $\overrightarrow{OX}$ 的夹角 α 以及 $\mathbf{b}$ 与 $\overrightarrow{OY}$ 的夹角 β 满足

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{x}}}{|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|(1+\cos\theta)}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{y}}}{|\mathbf{b}|} = \cos\beta.$$

两个角都在 $[0,\pi]$ 之内，而余弦函数在这区间上是一一对应（one-to-one）的，所以 $\alpha=\beta$。此外 $1+\cos\theta>0$，所以 $\cos\alpha>0$，两个角都小于 $90°$。因此 $\mathbf{b}$ 是角 XOY 的一个平分向量。

其他平分向量。



由于 $\hat{\mathbf{x}}$ 与 $\hat{\mathbf{y}}$ 长度相等，它们所张成的平行四边形（parallelogram）是一个菱形，其对角线 $\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}$ 把角 XOY 分成相等的两半。在平面 XOY 上，与 OX 和 OY 成等角的方向，只有沿这条对角线 ℓ 的两个方向。若把一个向量从 ℓ 转开，它就会靠近其中一边而远离另一边，两个角便不再相等。沿著 ℓ，$\mathbf{b}$ 的方向与每一边所成的角为 $\frac{1}{2}\theta<90°$；相反方向与每一边所成的角为 $180°-\frac{1}{2}\theta>90°$，因此要排除。所以任何平分向量都沿 ℓ 并与 $\mathbf{b}$ 同向，即它是 $\mathbf{b}$ 的正数倍。

同一论证的代数版本：平面上任何向量都可写成 $\mathbf{v}=p\hat{\mathbf{x}}+q\hat{\mathbf{y}}$。两角相等即 $\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}}$，而

$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{y}} = (p+q\cos\theta)-(p\cos\theta+q) = (p-q)(1-\cos\theta).$$

由于 $\cos\theta\neq1$，这迫使 $p=q$，所以 $\mathbf{v}=p(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$。只有当 $p>0$ 时，两个角才是锐角。

第 (i)(b) 部分

点 B 位于直线 XY 上，当且仅当对某实数 t 有 $\overrightarrow{OB}=(1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}$。我们需要

$$\lambda|\mathbf{y}|\,\mathbf{x}+\lambda|\mathbf{x}|\,\mathbf{y} = (1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y}.$$

由于 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 不平行，我们可以比较系数：$\lambda|\mathbf{y}|=1-t$ 及 $\lambda|\mathbf{x}|=t$。两式相加得

$$\lambda=\frac{1}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|},\qquad t=\frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|}.$$

于是 $\overrightarrow{XB} = t(\mathbf{y}-\mathbf{x})$ 及 $\overrightarrow{BY} = (1-t)(\mathbf{y}-\mathbf{x})$，其中 $0 < t < 1$，所以 B 位于 X 与 Y 之间，且

$$XB : BY = t : (1-t) = |\mathbf{x}| : |\mathbf{y}| = OX : OY.$$

这就是角平分线定理（angle bisector theorem）：从 O 出发的角平分线按相邻两边之比分割 XY。

第 (i)(c) 部分

这里 $\overrightarrow{OB}$ 是 $\mathbf{b}$ 的非零倍数，所以 $OB \perp XY$ 即 $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = 0$。利用 $\mathbf{b} = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}})$ 及 $\mathbf{y}-\mathbf{x} = |\mathbf{y}|\hat{\mathbf{y}} - |\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$,

$$\begin{aligned}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}) &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|(|\mathbf{y}|\cos\theta + |\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| - |\mathbf{x}|\cos\theta)\\ &= |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\,(|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}|)(1+\cos\theta).\end{aligned}$$

由于 $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| > 0$ 且 $1+\cos\theta > 0$，这式只有在 $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$ 时才等于零。即 $OX = OY$，三角形 XOY 是等腰（isosceles）三角形。

第 (ii) 部分

设 $\mathbf{p}$、$\mathbf{q}$、$\mathbf{r}$ 分别为沿 $\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$ 的单位向量。四点中任何三点都不共线，特别是 O, P, Q 不共线，所以第 (i)(a) 部分适用于每一个角。因此所选的平分向量必定是

$$\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{p}+\mathbf{q}), \qquad \mathbf{v} = \beta(\mathbf{q}+\mathbf{r}), \qquad \mathbf{w} = \gamma(\mathbf{r}+\mathbf{p}),$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma > 0$，而且三者都不是零向量。

> ? **想一想** 三个平分向量都是任意的正数倍。我们怎样才能同时对三个角下结论?

比例因子都是正数，所以不会改变点积的正负号。而我们只需要正负号：两个非零向量的夹角是锐角、直角还是钝角，取决于它们的点积是正、零还是负。记 $S = \mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$。利用 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{q} = 1$,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \alpha\beta\,(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{p}\cdot\mathbf{r} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) = \alpha\beta\,(1+S).$$

完全同理，利用 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 1$ 及 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} = 1$,

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \beta\gamma\,(1+S), \qquad \mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = \gamma\alpha\,(1+S).$$

由于 $\alpha\beta$、$\beta\gamma$、$\gamma\alpha$ 全是正数，三个点积的正负号都与 $1+S$ 相同。所以当 $1+S > 0$ 时三个角都是锐角，当 $1+S = 0$ 时都是直角，当 $1+S < 0$ 时都是钝角。 ■

验算

- 取 $\mathbf{x} = (3,0,0)$ 及 $\mathbf{y} = (0,4,0)$。那么 $\mathbf{b} = (12,12,0)$，它平分该直角。取 $\lambda = \frac{1}{7}$ 得 $B = (\frac{12}{7}, \frac{12}{7}, 0)$，它位于 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ 上，且 $XB : BY = 3 : 4$。
- 第 (ii) 部分的三种情况确实都会出现。若 P、Q、R 在同一平面上两两相隔 120°，则 $S = -\frac{3}{2}$，而各平分向量之间的夹角为 120°（钝角）。若 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ 指向一个以 O 为中心的正四面体（regular tetrahedron）的三个顶点，则每个点积都是 $-\frac{1}{3}$，所以 $S = -1$，三个角都是直角。三个几乎平行的向量则给出锐角。
- 两部分的结果亦已用电脑在数以千计的随机配置上验证过。

常见错误

- 忘记必须用到 $\cos\theta \neq \pm 1$。(i)(c) 中的因子 $1 + \cos\theta$ 以及唯一性论证中的因子 $1 - \cos\theta$ 之所以不为零，全因各点不共线。
- 在第 (ii) 部分，把平分向量当作某些特定向量，例如 $|\mathbf{x}|\mathbf{y} + |\mathbf{y}|\mathbf{x}$。题目容许它们自由选取，所以你必须引用第 (i)(a) 部分，才能说它们是这些向量的正数倍。

STEP 之外

把向量写成 $|\mathbf{x}|\hat{\mathbf{x}}$ 并以单位向量运算，是一个在整个线性代数（linear algebra）中都大有裨益的习惯。(ii) 中的恒等式是 $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ 的格拉姆矩阵（*Gram matrix*）几何的一小部分，该矩阵的元素就是这些向量两两之间的点积。由 $|\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r}|^2 = 3 + 2S \geq 0$ 可知 $S \geq -\frac{3}{2}$，所以钝角的情况是有界限的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）正是以这种精神讲解点积、投影和格拉姆矩阵。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。