详细解答

STEP II 2024，第 3 题

纯数学 · 半角正切代换

STEP II 2024，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分建立了一个对照关系：圆上角度为 ϕ 的点，对应从 N 经过该点的直线与 y 轴相交处的高度 $\tan\frac{1}{2}\phi$。把这个对应反过来用，使每个高度 q 都恰好对应圆上的一个点。这样，题目中每个关于 q 的函数都会变成一条关于 $\frac{1}{2}\theta$ 的三角恒等式，我们便可以直接看出角度 θ 的变化，从而得知点的变化。

解答

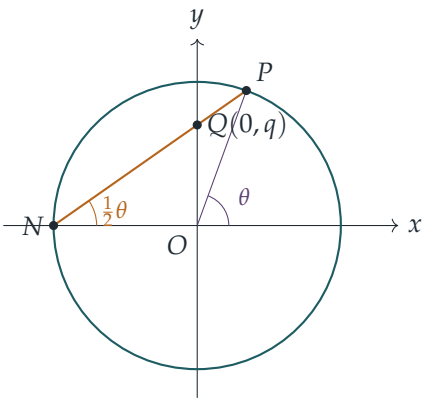
第 (i) 部分

由于 $P \neq N$，我们有 $\cos\theta \neq -1$，所以直线 NP 不是铅垂线。它的斜率（gradient）是

$$\frac{\sin\theta - 0}{\cos\theta - (-1)} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta}{2\cos^2\frac{1}{2}\theta} = \tan\tfrac{1}{2}\theta,$$

这里用了倍角公式（double-angle formulas）$\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ 和 $1+\cos\theta = 2\cos^2\frac{1}{2}\theta$（而且 $\cos\frac{1}{2}\theta \neq 0$，因为 $|\frac{1}{2}\theta| < \frac{1}{2}\pi$）。该直线通过 $(-1,0)$，所以它是 $y = (x+1)\tan\frac{1}{2}\theta$；代入 $x=0$ 便得 $q = \tan\frac{1}{2}\theta$，即所求。

从几何角度看，这就是圆周角（angle at the circumference）：由于 P 在圆心所对的角为 θ，弦 NP 在 N 处与 x 轴所成的角为 $\frac{1}{2}\theta$。



反过来：由高度得出点

我们会不断用到逆命题（converse）。给定任意实数 q，通过 N 和 $(0,q)$ 的直线是 $y = q(x+1)$。代入 $x^2+y^2=1$：

$$x^2 - 1 + q^2(x+1)^2 = 0 \iff (x+1)\left[(1+q^2)x - (1-q^2)\right] = 0.$$

根 $x=-1$ 对应 N，所以另一个交点是

$$\left(\frac{1-q^2}{1+q^2},\ \frac{2q}{1+q^2}\right).$$

若 $q = \tan\frac{1}{2}\phi$，则由 t 公式（t-formulas）可知此点为 $(\cos\phi, \sin\phi)$。由于 $\phi \mapsto \tan\frac{1}{2}\phi$ 是从 $(-\pi,\pi)$ 到 $\mathbb{R}$ 的双射（bijection），我们得到以下结果。

对照表。若对任何角 ϕ（不一定在 $(-\pi,\pi)$ 内）有 $\tan\frac{1}{2}\phi = q$，则从 N 经过 $(0,q)$ 的直线与圆的另一个交点为 $(\cos\phi, \sin\phi)$。

这对每个 ϕ 都成立，因为把 ϕ 换成 $\phi \pm 2\pi$ 既不改变 $\tan\frac{1}{2}\phi$（它作为 $\frac{1}{2}\phi$ 的函数，周期为 π），也不改变该点。

第 (ii) 部分

(a) 由于 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$，由和角公式（addition formula）得

$$\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\pi\right) = \frac{\tan\frac{1}{2}\theta + 1}{1 - \tan\frac{1}{2}\theta} = \frac{1+q}{1-q} = \mathrm{f}_1(q),$$

这就是 $\tan\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\pi\right)$，即所求。条件 $q \neq 1$ 意味着 $\theta \neq \frac{1}{2}\pi$，所以分母不为零。

(b) 由 (a)，Q_1 的高度是 $\tan\frac{1}{2}\phi$，其中 $\phi = \theta + \frac{1}{2}\pi$。由对照表，$P_1 = \left(\cos(\theta+\frac{1}{2}\pi), \sin(\theta+\frac{1}{2}\pi)\right)$。所以

$$P_1 \text{ 是} P \text{ 的像，变换为绕} O \text{ 逆时针旋转（rotation）} \tfrac{1}{2}\pi.$$

（被排除的值 $q = 1$ 对应 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，这正是唯一一个在此旋转下像为 N 本身的点。）

第 (iii) 部分

(a) P_2 是角度为 $\theta + \frac{1}{3}\pi$ 的点，所以应用第 (i) 部分（如有需要，先把角度化到 $(-\pi, \pi)$ 之内，这不会改变半角的 tan 值），并利用 $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}$：

$$\mathrm{f}_2(q) = \tan\left(\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{6}\pi\right) = \frac{q + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{q}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}q + 1}{\sqrt{3} - q}.$$

条件 $q \neq \sqrt{3}$ 即 $\theta \neq \frac{2}{3}\pi$，这恰好是 P_2 会等于 N、以致直线 NP_2 不存在的情况。

(b) 这次把 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ 用在差角公式上：

$$\mathrm{f}_3(q) = \frac{1-q}{1+q} = \frac{\tan\frac{1}{4}\pi - \tan\frac{1}{2}\theta}{1 + \tan\frac{1}{4}\pi\tan\frac{1}{2}\theta} = \tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}\theta\right) = \tan\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\pi - \theta\right).$$

由对照表，P_3 是角度为 $\frac{1}{2}\pi - \theta$ 的点，即 $(\sin\theta, \cos\theta)$。P 的坐标互换了，所以

$$P_3 \text{ 是}P \text{ 的反射（reflection），镜线为} y = x.$$

(c)

> **想一想** f_2^{-1} 对角度做了甚么？

由 (a)，对每个角 ϕ，f_2 都把 $\tan\frac{1}{2}\phi$ 映射到 $\tan\frac{1}{2}(\phi + \frac{1}{3}\pi)$（计算过程从未用到 $\phi = \theta$）。因此 $\mathrm{f}_2\left(\tan\frac{1}{2}(\psi - \frac{1}{3}\pi)\right) = \tan\frac{1}{2}\psi$；又由于 f_2 是一对一（one-to-one）的（解 $s = \mathrm{f}_2(q)$ 得唯一的 $q = \frac{\sqrt{3}s-1}{s+\sqrt{3}}$，其中 $s \neq -\sqrt{3}$），

$$\mathrm{f}_2^{-1}\left(\tan\tfrac{1}{2}\psi\right) = \tan\tfrac{1}{2}\left(\psi - \tfrac{1}{3}\pi\right).$$

所以 f_2^{-1} 把角度转回 $\frac{1}{3}\pi$。

现在逐步追踪角度经过这三个步骤的变化。由于 $0 < q < 1$，我们有 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$。

- f_2：角度 $\theta + \frac{1}{3}\pi \in (\frac{1}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi)$。此时 $\mathrm{f}_2(q) > 0$，所以可以应用 f_3。
- f_3：角度 $\frac{1}{2}\pi - (\theta + \frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{6}\pi - \theta \in (-\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$。这不是 $-\frac{2}{3}\pi$，所以高度不是 $-\sqrt{3}$，可以应用 f_2^{-1}。
- f_2^{-1}：角度 $\frac{1}{6}\pi - \theta - \frac{1}{3}\pi = -\theta - \frac{1}{6}\pi$。

所以 $\mathrm{f}_4(q) = \tan\frac{1}{2}\left(-\theta - \frac{1}{6}\pi\right)$，而由对照表，$P_4$ 是角度为 $-\frac{1}{6}\pi - \theta$ 的点。

关于通过 O、角度为 α 的直线作反射，会把角度为 θ 的点映射到角度为 $2\alpha-\theta$ 的点（镜线平分这两个方向）。这里 $2\alpha=-\frac{1}{6}\pi$，所以

$$P_4 \text{ 是}P \text{ 的反射，镜线通过}O\text{，其倾角为 } -\tfrac{1}{12}\pi\text{（从正}x\text{ 轴量起），}$$

即直线 $y=-\tan\frac{1}{12}\pi\,x=-(2-\sqrt{3})\,x$。

这是合理的：先旋转 $\frac{1}{3}\pi$，再关于 $y=x$ 反射，然后转回去，等同于关于“把镜线 $y=x$ 转回 $\frac{1}{3}\pi$”后所得的直线作反射，而 $\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{3}\pi=-\frac{1}{12}\pi$。明确地写出来，设 $t=\tan\frac{1}{12}\pi=2-\sqrt{3}$，

$$\mathrm{f}_4(q)=-\tan\left(\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1}{12}\pi\right)=-\frac{q+2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})q}.$$

验算

- 在 (iii)(b) 中取 $\theta=\frac{1}{2}\pi$：$P=(0,1)$，$q=1$，$\mathrm{f}_3(1)=0$，所以 $Q_3=O$ 而 $P_3=(1,0)$，这确实是 $(0,1)$ 关于 $y=x$ 的反射。
- 对 (c) 取 $q=\frac{1}{2}$：$\mathrm{f}_2(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}-1}\approx 1.5146$，接着 $\mathrm{f}_3\approx -0.2046$，然后 $\mathrm{f}_2^{-1}\approx -0.8868$，与封闭形式 $-\frac{\frac{1}{2}+2-\sqrt{3}}{1-\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}\approx -0.8868$ 吻合。
- 用电脑对 100 000 个随机点 P 进行检验，在舍入误差范围内确认了以上每一个关系（旋转 $\frac{1}{2}\pi$、f_2 的公式、关于 $y=x$ 的反射，以及关于倾角为 $-\frac{1}{12}\pi$ 的直线的反射）。

常见错误

- 断言 P_1 位于角度 $\theta+\frac{1}{2}\pi$，却没有留意这个角度可能落在 $(-\pi,\pi)$ 之外；这之所以无碍，只是因为当 ϕ 改变 2π 时，$\tan\frac{1}{2}\phi$ 和该点都会重复。
- 在 (c) 中，把 f_2^{-1} 的旋转方向弄反了（再加一次 $\frac{1}{3}\pi$），得出角度 $\frac{1}{2}\pi-\theta$，因而错误地令 P_4 与 P_3 相同。

STEP 之外

把角度为 θ 的点映射到 $q=\tan\frac{1}{2}\theta$ 的映射，就是把圆投影到一条直线上的*球极投影*（stereographic projection），而函数 f_1、f_2、f_3 都是莫比乌斯变换（Möbius transformations）$q\mapsto\frac{aq+b}{cq+d}$。圆的每一个旋转和反射都会变成直线上的这类变换，而对称变换的复合则对应 2×2 矩阵（matrices）$\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ 的乘法。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）把这幅图景发展得非常精彩，并将其推广到黎曼球面（Riemann sphere）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。