详细解答

STEP II 2024，第 2 题

纯数学 · 级数与积分

STEP II 2024，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分把每个积分 $\int_0^1 x^m/(8+x^3)\,\mathrm{d}x$ 都化成一个级数（series），所以凡是由相同元素组成的级数，都是这些积分的组合。要求出第 (ii) 或 (iii) 部分的级数之和，可以把括号拆成形如 $1/(3k+m+1)$ 的项，再把对应的被积函数（integrand）合并成一个分式，然后积分。因式分解（factorisation）$8+x^3=(x+2)(x^2-2x+4)$ 正是令所得积分变得容易处理的关键。

解答

全题中记

$$I_m=\int_0^1 \frac{x^m}{8+x^3}\,\mathrm{d}x.$$

第 (i) 部分

先提出因子 8，再对 $|u|<1$ 利用 $(1+u)^{-1}=\sum_{k\ge 0}(-1)^k u^k$，并取 $u=x^3/8$，得

$$(8+x^3)^{-1}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{x^3}{8}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{3k}}{8^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\,x^{3k}.$$

此式在 $|x^3/8|<1$，即 $|x|<2$ 时成立。

现在乘以 x^m，然后在 $[0,1]$ 上逐项（term by term）积分；这个区间位于成立范围之内（而且题目已说明不必理会收敛（convergence）问题）：

$$I_m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\int_0^1 x^{3k+m}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\cdot\frac{1}{3k+m+1},$$

这是因为当 $n = 3k + m \geq 0$ 时，$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = 1/(n+1)$。这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

三个分母 $3k+3$、$3k+2$ 和 $3k+1$ 分别是 $m = 2, 1, 0$ 时的 $3k+m+1$。因此由第 (i) 部分，该级数等于

$$I_2 - 2I_1 + 4I_0 = \int_0^1 \frac{x^2 - 2x + 4}{8 + x^3} \,\mathrm{d}x.$$

想一想 为甚么 $x^2 - 2x + 4$ 会跟某些东西约掉?

因为 $8 + x^3$ 是两个立方数之和（sum of two cubes）：在 $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ 中取 $a = x$、$b = 2$，得

$$8 + x^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4).$$

因此被积函数化简为 $\dfrac{1}{x+2}$，所以该级数等于 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+2} \,\mathrm{d}x$，即为所求。最后，

$$\int_0^1 \frac{1}{x+2} \,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x+2)\Big]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln \tfrac{3}{2}.$$

第 (iii) 部分

首先把括号按 k 拆成部分分式（partial fractions）。设 $2k+1 = \alpha(3k+2) + \beta(3k+1)$。代入 $k = -\frac{1}{3}$ 得 $\frac{1}{3} = \alpha$；代入 $k = -\frac{2}{3}$ 得 $-\frac{1}{3} = -\beta$，所以 $\beta = \frac{1}{3}$。因此

$$\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)} = \frac{24}{3k+1} + \frac{24}{3k+2},$$

而由第 (i) 部分（取 $m = 0$ 及 $m = 1$），该级数等于

$$24I_0 + 24I_1 = \int_0^1 \frac{24(1+x)}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \,\mathrm{d}x.$$

现在把这个被积函数拆成部分分式：

$$\frac{1+x}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 4},$$

于是

$$1 + x = A(x^2 - 2x + 4) + (Bx + C)(x + 2).$$

代入 $x = -2$ 得 $-1 = 12A$, 所以 $A = -\frac{1}{12}$。比较 x^2 的系数得 $0 = A + B$, 所以 $B = \frac{1}{12}$。比较常数项得 $1 = 4A + 2C$, 所以 $C = \frac{2}{3}$。(验算 x 的系数: $-2A + 2B + C = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} = 1$。)
乘以 24，得

$$\begin{aligned}\frac{24(1+x)}{8+x^3} &= -\frac{2}{x+2} + \frac{2x+16}{x^2-2x+4} \\ &= -\frac{2}{x+2} + \frac{2x-2}{x^2-2x+4} + \frac{18}{(x-1)^2+3},\end{aligned}$$

其中我们把二次式的导数 $2x-2$ 分拆出来，并对余下部分配方（completing the square）。

我们把每一部分在 $[0,1]$ 上积分。

$$\int_0^1 \frac{-2}{x+2}\,\mathrm{d}x = -2\ln\tfrac{3}{2} = -2\ln 3 + 2\ln 2,$$
$$\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(x^2-2x+4)\Big]_0^1 = \ln\tfrac{3}{4} = \ln 3 - 2\ln 2,$$
$$\int_0^1 \frac{18}{(x-1)^2+3}\,\mathrm{d}x = \frac{18}{\sqrt{3}}\Big[\arctan\frac{x-1}{\sqrt{3}}\Big]_0^1$$
$$= 6\sqrt{3}\Big(0 - \arctan(-\tfrac{1}{\sqrt{3}})\Big) = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \pi\sqrt{3}.$$

最后一行用了 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+c^2} = \frac{1}{c}\arctan\frac{u}{c}$，其中 $u = x-1$、$c = \sqrt{3}$。把三部分相加，$\ln 2$ 的项互相抵消，得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{3(k+1)}}\left(\frac{72(2k+1)}{(3k+1)(3k+2)}\right) = \pi\sqrt{3} - \ln 3,$$

所以 $a = 3$ 及 $b = 3$。

验算

- 这些级数收敛得非常快（每一项最多只有前一项的八分之一），所以取几项已足以验算。在第 (ii) 部分，级数首三项给出 $0.41667 - 0.01198 + 0.00084 \approx 0.40553$，而 $\ln\frac{3}{2} \approx 0.40547$。
- 在第 (iii) 部分，$\pi\sqrt{3} - \ln 3 \approx 5.4414 - 1.0986 = 4.3428$；用电脑把级数首 200 项相加，结果在小数点后十二位都吻合。即使只取 $k = 0$ 那一项，也得 $\frac{1}{8}\cdot 36 = 4.5$，数量级正确。

常见错误

- 展开式写成 8^{-k} 而不是 $8^{-(k+1)}$：一开始提出的因子 $\frac{1}{8}$ 不可遗漏。
- 把 $\frac{1}{3k+3}$ 对应到 I_3 而不是 I_2：分母是 $3k+m+1$，所以 m 比常数项小一。
- 忘记 $\arctan\big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\big)$ 是负数，以致 $\pi\sqrt{3}$ 那一项的正负号出错。

STEP 之外

像第 (i) 部分那样交换求和与积分的次序，在这里是合理的，因为该幂级数（power series）在 $[0,1]$ 上一致收敛（converges uniformly）；何时可以这样交换，是大学一年级分析（analysis）课程的核心主题之一。同样的方法可以像第 (iii) 部分那样，准确求出 $1 - \frac{1}{4} +$

$\frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$ 之和。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对一致收敛和逐项积分有细致的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。