详细解答

STEP II 2024，第 10 题

力学 · 加速楔上的摩擦力

STEP II 2024，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

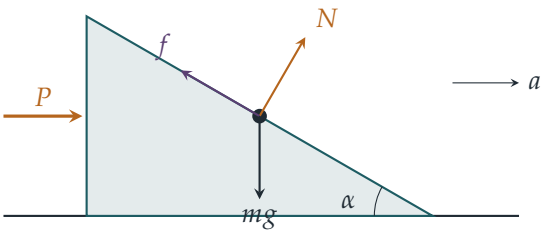
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

整道题建基于两个观察。第一，水平面光滑（smooth），所以作用于整个系统（棱柱连同质点）的唯一水平外力是 P，由此可立即得出共同加速度。第二，由于质点相对棱柱不动，它的水平加速度与棱柱完全相同，因此只需对质点沿斜面及垂直斜面分解力，便可直接求得摩擦力和法向反作用力（normal reaction）。第 (iii) 部分的不等式其实就是“摩擦力 $\leq \mu\times$ 法向反作用力”，再用复角公式（compound-angle formulae）整理一下而已。

解答

我们把质点视为质点（particle），把棱柱（prism）视为在光滑水平面上滑动的刚体（rigid body），并设质点与斜面之间的接触是粗糙（rough）的，摩擦系数（coefficient of friction）为 μ。把竖直面放在左边，使斜面向右下倾斜；这样 P 便把棱柱推向右方。



作用于质点的力有：重量 mg、垂直于斜面的法向反作用力 N，以及摩擦力。我们把摩擦力视为一个带正负号的量 f，以沿斜面向上为正（若 f 结果为负，则摩擦力实际上沿斜面向下）。摩擦力的大小为 $F = |f|$。

第 (i) 部分

假设系统处于平衡（equilibrium），即所有物体都静止。对质点沿垂直斜面及沿斜面方向分解力，得

$$N = mg\cos\alpha, \qquad f = mg\sin\alpha.$$

质点不滑动的条件是 $|f| \le \mu N$，即 $mg\sin\alpha \le \mu\, mg\cos\alpha$，亦即 $\mu \ge \tan\alpha$（由于 α 是锐角，可以除以 $mg\cos\alpha > 0$）。因此若 $\mu < \tan\alpha$，便不可能平衡：质点必定滑动。

第 (ii) 部分

加速度。把棱柱和质点合起来考虑。水平面光滑，只施加竖直方向的力；质点与棱柱之间的力属于内力。因此唯一的水平外力是 P，而两者的加速度同为 a（水平向右），故

$$P = (M+m)a, \qquad a = \frac{P}{M+m}.$$

对质点分解力。质点的加速度是水平的 a。它沿斜面向上的分量是 $-a\cos\alpha$（斜面向左上升，而质点向右加速），沿向外法线方向的分量是 $a\sin\alpha$。

> ? **想一想** 为甚么要沿斜面及垂直斜面分解，而不是沿水平及竖直方向分解?

沿斜面方向，只有 f 和重量有分量；垂直斜面方向，只有 N 和重量有分量。所以每条方程只含一个未知量，免去解联立方程。代价是加速度也要分解，但这并不困难。

沿斜面向上：

$$f - mg\sin\alpha = -ma\cos\alpha \quad\Longrightarrow\quad f = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha).$$

代入 $a = P/(M+m)$，得

$$f = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha],$$

因此摩擦力的大小为

$$F = \frac{m}{M+m}\,|(M+m)g\sin\alpha - P\cos\alpha|,$$

与题目所求相符。这里的绝对值确实不可少：P 较小时摩擦力沿斜面向上；但 P 较大时，斜面推向质点的力足够大，摩擦力必须沿斜面向下，才能阻止质点沿斜面上移。

垂直斜面方向（向外法线）：

$$N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{m}{M+m}[(M+m)g\cos\alpha + P\sin\alpha].$$

由于 $P > 0$ 且 α 是锐角，此式为正，所以不需要绝对值，而质点亦保持与斜面接触。

第 (iii) 部分

质点相对棱柱保持静止，当且仅当摩擦力足以提供所需：$F \le \mu N$。设 $G = (M+m)g$，并约去正因子 $m/(M+m)$：

$$|G\sin\alpha - P\cos\alpha| \le \tan\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

乘以 $\cos\lambda > 0$，这等价于以下一对不等式（inequalities）：

$$-\sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha) \;\le\; \cos\lambda\,(G\sin\alpha - P\cos\alpha) \;\le\; \sin\lambda\,(G\cos\alpha + P\sin\alpha).$$

> ? **想一想** 这些不等式如何变成 $\alpha \pm \lambda$ 的正切?

把含 G 的项移到一边，含 P 的项移到另一边；这样每个括号都是一个复角展开式。

右边的不等式（沿斜面向上的摩擦力不可超过其极限）：

$$G(\sin\alpha\cos\lambda - \cos\alpha\sin\lambda) \le P(\cos\alpha\cos\lambda + \sin\alpha\sin\lambda),$$
$$G\sin(\alpha-\lambda) \le P\cos(\alpha-\lambda).$$

由于 $0 < \alpha - \lambda < \frac{1}{4}\pi$，有 $\cos(\alpha-\lambda) > 0$，所以此式即 $P \ge G\tan(\alpha-\lambda)$。

左边的不等式（沿斜面向下的摩擦力不可超过其极限）：

$$P(\cos\alpha\cos\lambda - \sin\alpha\sin\lambda) \le G(\sin\alpha\cos\lambda + \cos\alpha\sin\lambda),$$
$$P\cos(\alpha+\lambda) \le G\sin(\alpha+\lambda).$$

这里要用到条件 $\lambda < \alpha < \frac{1}{4}\pi$：它给出 $0 < \alpha+\lambda < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos(\alpha+\lambda) > 0$，可以相除得 $P \le G\tan(\alpha+\lambda)$。

两式必须同时成立，故

$$(M+m)g\tan(\alpha-\lambda) \le P \le (M+m)g\tan(\alpha+\lambda),$$

与题目所求相符。

验算

- 当 $P = 0$ 时，下界给出 $0 \ge G\tan(\alpha-\lambda)$，由于 $\lambda < \alpha$，此式不成立：这与第 (i) 部分一致，因为 $\mu = \tan\lambda < \tan\alpha$。
- 当 $P = G\tan\alpha$ 时得 $f = 0$：此时的推力恰好令光滑质点能静止不动，这正是熟悉的“加速楔子”结果 $a = g\tan\alpha$。这个值理应落在区间之内，事实亦然。

- 数值上，取 $M = 3$、$m = 1$、$g = 9.8$、$\alpha = 30°$、$\lambda = 10°$，容许范围是 $14.27 \le P \le 32.89$（牛顿）。当 $P = 20$ 时，公式给出 $F \approx 0.570$ 及 $N \approx 10.99$，所以 $F/N \approx 0.052 < \tan 10° \approx 0.176$。用电脑对数以千计的随机情况直接解质点的方程，结果与两条公式及该区间都吻合。

常见错误

- 在第 (ii) 部分取 $N = mg\cos\alpha$：斜面正在加速，所以法向反作用力并非静止时的数值。
- 漏掉绝对值，结果只求得 P 的下界；上界来自摩擦力沿斜面向下的情况。
- 除以 $\cos(\alpha + \lambda)$ 时没有指出它是正数；这正是用到 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ 的地方。

STEP 之外

更简洁的看法是在棱柱的参考系中处理问题，该参考系以 a 加速：在其中，质点会受到一个向后的额外“虚拟力”（fictitious force）ma，问题就变成在粗糙斜面上的普通静力学，只是等效重力倾侧了 $\arctan(a/g)$ 这个角度。此时条件就是：这个倾侧角与 α 的差必须在摩擦角（angle of friction）λ 之内，这正好就是所求得的区间。非惯性参考系（non-inertial frames）与虚拟力在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）中有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。