详细解答

STEP II 2024，第 1 题

纯数学 · 连续整数之和

STEP II 2024，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

等式两边都是算术级数（arithmetic series），所以各自等于（项数）×（平均项）。令两者相等，便得到 n、k 与 c 之间的一条二次关系式，而题目余下部分就是针对这条关系式的数论（number theory）问题。固定 k 后，很容易解出 c，再由奇偶性（parity）或余数判断 c 何时是正整数。若改为固定 $c=1$，便得到一条佩尔（Pell）型方程，而 (iv)(b) 中的映射正是由旧解产生新解的标准方法。

解答

第 (i) 部分

由 c 开始往上的 $n+k$ 个整数是 $c, c+1, \ldots, c+n+k-1$。它们的和是

$$S_1 = (n+k)c + \frac{(n+k)(n+k-1)}{2}.$$

接下来的 n 个整数是 $c+n+k, \ldots, c+2n+k-1$，其和为

$$S_2 = n(c+n+k) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

把两个和都乘以二并展开，

$$2S_1 = 2nc + 2kc + n^2 + 2nk + k^2 - n - k,$$
$$2S_2 = 2nc + 2n^2 + 2nk + n^2 - n.$$

相减得 $2S_1 - 2S_2 = 2kc + k^2 - k - 2n^2$。因此

$$S_1 = S_2 \iff 2kc + k^2 - k = 2n^2 \iff 2n^2 + k = 2ck + k^2.$$

每一步都是可逆的（我们只是展开、乘以二和移项），所以两个和相等当且仅当 $2n^2+k=2ck+k^2$，得证。

第 (ii) 部分

(a) 当 $k=1$ 时，条件为 $2n^2+1=2c+1$，所以 $c=n^2$。对每个 n 这都是正整数，因此每一个正整数 n 都可以，且 $c=n^2$。（例如 $n=2$：$4+5+6=7+8$。）

(b) 当 $k=2$ 时，条件为 $2n^2+2=4c+4$，即

$$n^2=2c+1, \qquad c=\frac{n^2-1}{2}.$$

要 c 是整数，n^2 必须是奇数，所以 n 必须是奇数。要 c 是正数，需要 $n^2>1$，这就排除了 $n=1$。反过来，每个奇数 $n\geq 3$ 都给出正整数 c。所以可能的值是

$$n\in\{3,5,7,\dots\}, \qquad c=\tfrac{1}{2}(n^2-1).$$

$n=3$、$c=4$ 的情况就是等式 $4+5+6+7+8=9+10+11$。

第 (iii) 部分

当 $k=4$ 时，条件为 $2n^2+4=8c+16$，即

$$n^2=4c+6=4(c+1)+2.$$

所以 n^2 除以 4 的余数将会是 2。但平方数除以 4 的余数只能是 0 或 1：若 $n=2m$，则 $n^2=4m^2$；若 $n=2m+1$，则 $n^2=4(m^2+m)+1$。所以没有解。

第 (iv) 部分

当 $c=1$ 时，条件变成 $2n^2+k=2k+k^2$，即

$$2n^2=k(k+1). \qquad (*)$$

换句话说 $n^2=\frac{1}{2}k(k+1)$：我们要找同时是完全平方数（perfect square）的三角形数（triangular number）。

(a) 尝试较小的 k：$k=1$ 给出 $2n^2=2$，所以 $n=1$；接着 $k=2,\dots,7$ 给出 $k(k+1)/2=3,6,10,15,21,28$，都不是平方数；而 $k=8$ 给出 $2n^2=72$，所以 $n=6$。因此两个可能情况是

$$k=1,\ n=1 \qquad \text{和} \qquad k=8,\ n=6.$$

（验证第二个：$1+2+\cdots+14=105$ 及 $15+16+\cdots+20=105$。）

(b) 设 $2N^2 = K^2 + K$。令 $N' = 3N + 2K + 1$ 及 $K' = 4N + 3K + 1$。则

$$\begin{aligned} 2N'^2 &= 2(9N^2 + 4K^2 + 1 + 12NK + 6N + 4K) \\ &= 18N^2 + 8K^2 + 24NK + 12N + 8K + 2, \\ K'^2 + K' &= (16N^2 + 9K^2 + 1 + 24NK + 8N + 6K) + (4N + 3K + 1) \\ &= 16N^2 + 9K^2 + 24NK + 12N + 9K + 2. \end{aligned}$$

相减，

$$2N'^2 - (K'^2 + K') = 2N^2 - K^2 - K = 0,$$

这里用了假设。所以 $2N'^2 = K'(K' + 1)$。由于 N 和 K 是正整数，N' 和 K' 也是正整数；由 $(*)$ 及第 (i) 部分，N' 是 n 的一个可能值，对应的 $k = K'$。

? **想一想** 这些古怪的公式从何而来?

把 $(*)$ 乘以 4 再加 1：它变成 $(2k+1)^2 - 8n^2 = 1$。令 $x = 2k + 1$ 及 $y = n$，这就是佩尔方程 $x^2 - 8y^2 = 1$，其所有解可以由 $x + y\sqrt{8}$ 乘以最小解 $3 + \sqrt{8}$ 逐一产生。写出 $(x + y\sqrt{8})(3 + \sqrt{8}) = (3x + 8y) + (x + 3y)\sqrt{8}$，再转回 k 和 n，便恰好得到 $N' = 3N + 2K + 1$ 及 $2K' + 1 = 3(2K + 1) + 8N$，即 $K' = 4N + 3K + 1$。

(c) 把映射应用于 $(N, K) = (1, 1)$，只会得到 $N' = 6$、$K' = 8$，即 (a) 中的第二个解。把它应用于 $(N, K) = (6, 8)$：

$$N' = 18 + 16 + 1 = 35, \qquad K' = 24 + 24 + 1 = 49,$$

再把它应用于 $(35, 49)$：

$$N' = 105 + 98 + 1 = 204, \qquad K' = 140 + 147 + 1 = 288.$$

所以另外两个解是

$$k = 49,\ n = 35 \qquad \text{和} \qquad k = 288,\ n = 204.$$

确实 $2 \cdot 35^2 = 2450 = 49 \cdot 50$ 及 $2 \cdot 204^2 = 83232 = 288 \cdot 289$。

验算

- 开首的例子是 $n = 3$、$k = 2$、$c = 4$：$2 \cdot 9 + 2 = 20 = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 4$，所以它满足 (i) 的关系式，并符合 (ii)(b)，其中 $c = \frac{1}{2}(9 - 1)$。
- 用电脑搜索所有 $n, k < 40$ 及 $c < 200$，证实两个和相等恰好当 $2n^2 + k = 2ck + k^2$；另以 $c = 1$ 及 $n, k < 400$ 搜索，只找到 $(k, n) = (1, 1), (8, 6), (49, 35), (288, 204)$，与 (iv) 吻合。

- 在 (iv)(b) 中，注意由 (N, K) 到 (N', K') 的一步对任何 N、K 都保持 $2N^2 - K^2 - K$ 这个量不变，这是用小数字快速检查代数运算的方法，例如 $N = K = 0$：此时 $N' = K' = 1$，两个值都是 0。

常见错误

- 在 (ii)(b) 中把 $n = 1$ 也包括在内：它给出 $c = 0$，并不是正整数。
- 在 (i) 中数错第二组由哪里开始：它由 $c + n + k$ 开始，而不是 $c + n + k + 1$。
- 在 (iv)(c) 中再次给出 $k = 8$、$n = 6$：这是映射的第一个输出，但在 (a) 已经找到。

STEP 之外

方程 $x^2 - 8y^2 = 1$ 是一条佩尔方程；对任何非平方数 d，$x^2 - dy^2 = 1$ 的所有解都来自单一基本解（fundamental solution）的幂，通过 $x + y\sqrt{d}$ 这类数的乘法得出。这是初次窥见 $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ 这类环（ring）中的单位（unit），而这是代数数论（algebraic number theory）的核心课题。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）通过连分数（continued fraction）处理佩尔方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。