详细解答

STEP III 2023，第 9 题

力学 • 以绳连接的两质点运动

> **STEP III 2023，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

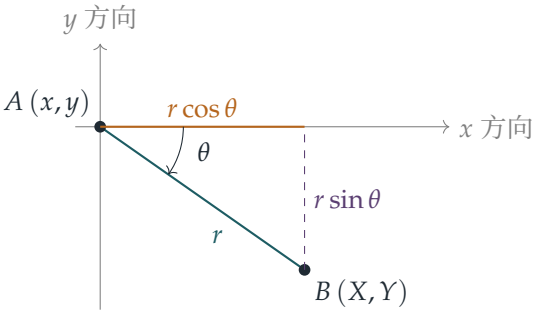
用 A 的位置和绳子的方向 θ 来描述整个系统。张力（tension）只沿绳子方向作用，所以每个质点的加速度在垂直于绳子的方向上都没有分量。比较两个质点的垂直加速度，便可推出 $\ddot{\theta} = 0$：绳子以恒定的速率转动。之后再用动量守恒（conservation of momentum）就能完成解题。

解答

全题中，两个质点在光滑水平面上运动，绳子轻而不可伸长（inextensible），而且（按题意可假设）绳子一直保持拉紧，所以任何时刻都有 $AB = r$。

第 (i) 部分

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度是 r。由于 θ 是从正 x 轴顺时针量度的，当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，这个向量指向 x 方向的下方，如图所示。



从 A 走到 B，我们在 x 方向移动 $r\cos\theta$，在 y 的负方向移动 $r\sin\theta$，所以

$$X = x + r\cos\theta, \qquad Y = y - r\sin\theta.$$

这两条式子对所有 θ 都成立，因为 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 正是从 x 轴顺时针转 θ 角的单位向量（unit vector）。

第 (ii) 部分

对 t 求导（r 是常数，θ 是 t 的函数）：

$$\dot{X} = \dot{x} - r\dot{\theta}\sin\theta, \qquad \dot{Y} = \dot{y} - r\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\ddot{X} = \ddot{x} - r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta, \qquad \ddot{Y} = \ddot{y} - r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta.$$

第 (iii) 部分

张力 T 沿单位向量 $(\cos\theta, -\sin\theta)$ 把 A 拉向 B，又沿 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 把 B 拉向 A。根据牛顿第二定律（Newton's second law），

$$m\ddot{x} = T\cos\theta, \quad m\ddot{y} = -T\sin\theta, \qquad M\ddot{X} = -T\cos\theta, \quad M\ddot{Y} = T\sin\theta.$$

因此

$$m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = T\cos\theta\sin\theta - T\sin\theta\cos\theta = 0,$$

用完全相同的方法可得 $M(\ddot{X}\sin\theta + \ddot{Y}\cos\theta) = 0$。分别除以 m 和 M，便得到所要求的两个结果。（从几何角度看：$(\sin\theta, \cos\theta)$ 垂直于绳子，而两个质点在这个方向上都没有加速度。）

> ? **想一想** 我们有两条方程，都是说“没有垂直方向的加速度”。它们怎样告诉我们关于 θ 的信息?

把第二条减去第一条，再把第 (ii) 部分中 $\ddot{X} - \ddot{x}$ 和 $\ddot{Y} - \ddot{y}$ 的表达式代入：

$$\begin{aligned} 0 &= (\ddot{X} - \ddot{x})\sin\theta + (\ddot{Y} - \ddot{y})\cos\theta \\ &= (-r\ddot{\theta}\sin\theta - r\dot{\theta}^2\cos\theta)\sin\theta + (-r\ddot{\theta}\cos\theta + r\dot{\theta}^2\sin\theta)\cos\theta \\ &= -r\ddot{\theta}\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -r\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

由于 $r \neq 0$，所以 $\ddot{\theta} = 0$，即 $\dot{\theta}$ 是常数。

要求出这个常数，可用初始条件。在 $t = 0$ 时，B 相对于 A 位于 $(r, 0)$，所以 $\theta(0) = 0$。此外 $\dot{y}(0) = u$ 而 $\dot{Y}(0) = 0$，于是第 (ii) 部分中 $\dot{Y}$ 的表达式给出

$$0 = u - r\dot{\theta}(0)\cos 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\theta}(0) = \frac{u}{r}.$$

（$\dot{X}$ 的方程与此一致：$0 = 0 - r\dot{\theta}(0)\sin 0$。）所以对所有 t 都有 $\dot{\theta} = u/r$；利用 $\theta(0) = 0$ 积分，得

$$\theta = \frac{ut}{r},$$

此即所求。

第 (iv) 部分

把第 (iii) 部分的运动方程两两相加，

$$m\ddot{x} + M\ddot{X} = T\cos\theta - T\cos\theta = 0, \qquad m\ddot{y} + M\ddot{Y} = -T\sin\theta + T\sin\theta = 0.$$

这就是动量守恒：张力是系统的内力。把第二条方程积分一次，可知 $m\dot{y} + M\dot{Y}$ 是常数，等于其初始值 $mu + M\cdot 0 = mu$。再积分一次，并利用 $y(0) = Y(0) = 0$，得

$$my + MY = mut.$$

第 (v) 部分

代入第 (i) 部分的 $Y = y - r\sin\theta$ 和第 (iii) 部分的 $\theta = ut/r$：

$$my + M\left(y - r\sin\frac{ut}{r}\right) = mut \quad\Longrightarrow\quad y = \frac{1}{m+M}\left(mut + Mr\sin\frac{ut}{r}\right),$$

此即所求结果。

第 (vi) 部分

把第 (v) 部分的结果求导，

$$\dot{y} = \frac{1}{m+M}\left(mu + Mu\cos\frac{ut}{r}\right) = \frac{u}{m+M}\left(m + M\cos\frac{ut}{r}\right).$$

在时刻 $t = \pi r/u$，即绳子转了半圈时，$\cos(ut/r) = -1$，而

$$\dot{y} = \frac{u(m-M)}{m+M},$$

当 $M > m$ 时这是负数（因为 $u > 0$）。所以在那一刻，A 的速度的 y 分量是负的；由连续性（continuity）可知，在该时刻附近的一段时间区间内亦然。

验算

- 在 $t = 0$ 时，由第 (v) 部分的公式得 $\dot{y} = u(m+M)/(m+M) = u$，与 A 的初速度相符。

- 在 x 方向用同样方法可得 $mx + MX = Mr$，所以 $x = \dfrac{Mr}{m+M}(1-\cos\theta)$。结合第 (v) 部分，质心（centre of mass）在 y 方向以速率 $mu/(m+M)$ 作直线运动，而两个质点以角速度（angular speed）u/r 绕质心转动，这正是我们熟悉的图像。于是张力是常数 $\dfrac{mM}{m+M}\dfrac{u^2}{r} > 0$，所以绳子确实一直保持拉紧。
- 若 $M \to \infty$，B 保持不动，第 (v) 部分给出 $y = r\sin(ut/r)$：A 绕 B 作半径为 r 的圆周运动，理应如此。
- 取 $m = 1$、$M = 3$、$u = r = 1$，用电脑模拟两个以极硬弹簧相连的质点，在 $t = \pi$ 时得到 $y \approx 0.7854$ 和 $\dot{y} \approx -0.5000$，与 $\frac{\pi}{4}$ 及 $\frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$ 吻合。

常见错误

- 因顺时针的约定而弄错正负号：$Y = y - r\sin\theta$，所以 $\dot{Y}$ 中的项是 $-r\dot{\theta}\cos\theta$，而不是 $+$。
- 忘记交代常数 u/r 的来由：它来自 $\dot{Y}(0) = 0$，而不单单来自 A 的速率。
- 在第 (vi) 部分中只声称 $\dot{y} < 0$“最终”会成立，却没有给出具体时刻；$t = \pi r/u$ 便是一个确定的时刻。

STEP 之外

这是二体问题（two-body problem）最简单的形式：运动分解为质心的匀速运动，加上相对于质心的运动，而后者由约化质量（reduced mass）$mM/(m+M)$ 支配。同样的分解方法是行星轨道和双原子分子（diatomic molecule）振动的基础。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）仔细地发展了质心坐标和约化质量的理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。