详细解答

STEP III 2023，第 8 题

纯数学 · 分段微分方程

STEP III 2023，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

绝对值（modulus）令这条方程变成非线性（non-linear），但只是轻微的非线性：在任何一段 y' 保持同一正负号的区间上，$|y'|$ 不过就是 y' 或 $-y'$，方程于是变成一条普通的常系数（constant-coefficient）方程。因此我们沿著解一直走，直到 y' 变为零，然后转用另一条线性方程，并在接合点令 y 和 y' 相配。第 (iv) 部分是省力的窍门：把解反射（reflection），即 $x \mapsto c - x$，会令一阶导数项变号，而这正好就是两条线性方程之间的切换。

解答

第 (i) 部分

设 $\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-x}$，则

$$\mathrm{f}'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x}, \qquad \mathrm{f}''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (1-x)\mathrm{e}^{-x} = (x-2)\mathrm{e}^{-x}.$$

因此对每个实数 x，

$$\mathrm{f}'' + 2\mathrm{f}' + \mathrm{f} = [(x-2) + 2(1-x) + x]\mathrm{e}^{-x} = 0$$

都成立。此外 $\mathrm{f}(0) = 0$ 及 $\mathrm{f}'(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^{0} = 1$，符合要求。

由于 $\mathrm{e}^{-x} > 0$，$\mathrm{f}'(x)$ 的正负号与 $1 - x$ 的正负号相同，而当 $x \leq 1$ 时，$1 - x$ 为 ≥ 0。所以当 $x \leq 1$ 时，$\mathrm{f}'(x) \geq 0$。

第 (ii) 部分

在 $x \le 1$ 上，我们有 $\mathrm{f}' \ge 0$，所以 $|\mathrm{f}'| = \mathrm{f}'$，而 (ii) 的方程与 (i) 的方程相同。于是 f 在 $x \le 1$ 上满足新方程及其初始条件，故

$$\mathrm{g}_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

在接合点，$\mathrm{g}_1(1) = \mathrm{e}^{-1}$ 及 $\mathrm{g}_1'(1) = 0$。连续可微（continuously differentiable）意味著 g_2 必须以相同的值开始：$\mathrm{g}_2(1) = \mathrm{e}^{-1}$，$\mathrm{g}_2'(1) = 0$。

> **想一想** 紧接 $x = 1$ 之后，y' 取甚么正负号?

在 $x = 1$ 处，方程给出 $y'' = -2|y'| - y = -\mathrm{e}^{-1} < 0$，所以 y' 在经过 0 时递减，并在稍为越过 $x = 1$ 之处为负。在那里 $|y'| = -y'$，方程变成

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0.$$

辅助方程（auxiliary equation）$m^2 - 2m + 1 = 0$ 有重根（repeated root）$m = 1$，所以 $\mathrm{g}_2(x) = (A + Bx)\mathrm{e}^x$ 及 $\mathrm{g}_2'(x) = (A + B + Bx)\mathrm{e}^x$。在 $x = 1$ 处的条件给出

$$(A + B)\mathrm{e} = \mathrm{e}^{-1}, \qquad (A + 2B)\mathrm{e} = 0,$$

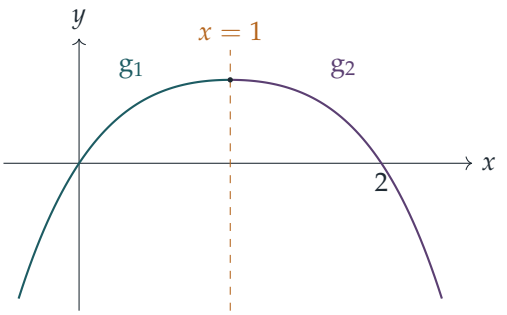
所以 $B = -\mathrm{e}^{-2}$ 及 $A = 2\mathrm{e}^{-2}$。因此

$$\mathrm{g}_2(x) = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2}.$$

我们必须验证这与假设 $y' \le 0$ 一致：对所有 $x \ge 1$，$\mathrm{g}_2'(x) = (1 - x)\mathrm{e}^{x-2} \le 0$。所以在整个 $x \ge 1$ 上都有 $|\mathrm{g}_2'| = -\mathrm{g}_2'$，而 g_2 确实在整个 $x \ge 1$ 上满足这条含绝对值的方程。

第 (iii) 部分

在 g_1 中以 $2 - x$ 代替 x，得到 $(2 - x)\mathrm{e}^{-(2-x)} = (2 - x)\mathrm{e}^{x-2} = \mathrm{g}_2(x)$。所以 $\mathrm{g}_2(x) = \mathrm{g}_1(2 - x)$：曲线 $y = \mathrm{g}_2(x)$ 是 $y = \mathrm{g}_1(x)$ 关于直线 $x = 1$ 的反射。



第 (iv) 部分

设 $Y(x) = \mathrm{k}(c-x)$，并记 $u = c - x$。由链式法则（chain rule），配合 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = -1$，

$$Y'(x) = -\mathrm{k}'(u), \qquad Y''(x) = \mathrm{k}''(u).$$

因此

$$Y'' - pY' + qY = \mathrm{k}''(u) + p\,\mathrm{k}'(u) + q\,\mathrm{k}(u),$$

而只要 $r \le u \le s$，右边便等于零，因为 k 在那里是原方程的解。而 $r \le c - x \le s$ 等价于

$$c - s \le x \le c - r,$$

所以 $y = \mathrm{k}(c-x)$ 在区间 $[c-s, c-r]$ 上满足 $y'' - py' + qy = 0$。

这解释了 (iii)：取 $p = 2$、$q = 1$、在 $(-\infty, 1]$ 上 $\mathrm{k} = \mathrm{g}_1$ 及 $c = 2$，反射后的函数 $\mathrm{g}_1(2-x)$ 在 $[1, \infty)$ 上是 $y'' - 2y' + y = 0$ 的解。

第 (v) 部分

设 $\mathrm{h}(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$，则

$$\mathrm{h}'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

所以 $\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\pi/4}\cos\frac{1}{2}\pi = 0$。（第二种形式亦显示，如题目所给，在 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 上 $\mathrm{h}' \ge 0$，以及 $\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$，这一点稍后会用到。）

计划与第 (ii) 部分如出一辙。在 $y' \le 0$ 的区间上，方程是 $y'' - 2y' + 2y = 0$；在 $y' \ge 0$ 之处，方程是 $y'' + 2y' + 2y = 0$，而 h 满足这条方程。

(a) 在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 处，我们有 $y = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\pi/4} > 0$ 及 $y' = 0$，所以 $y'' = -2y < 0$，而 y' 转为负。因此我们需要 $y'' - 2y' + 2y = 0$ 的一个解，而取 $p = q = 2$ 的第 (iv) 部分正好提供了一个：$y = \mathrm{h}(c-x)$ 在 $c - \frac{1}{4}\pi \le x \le c + \frac{3}{4}\pi$ 上成立。选取 $c = \frac{1}{2}\pi$，这个区间就恰好是 $[\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$，并且

$$y = \mathrm{h}\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

? **想一想** 我们怎样知道这是那个正确的解，而不只是某一个解?

它在接合点相配：$\mathrm{h}(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi) = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$，而它的导数 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x)$ 在 $x = \frac{1}{4}\pi$ 处等于 $-\mathrm{h}'(\frac{1}{4}\pi) = 0$。所以 y 和 y' 在那里连续。它亦是自洽的：对 $x \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi]$，我们有 $\frac{1}{2}\pi - x \in [-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$，而在那里 $\mathrm{h}' \ge 0$，所以 $y' = -\mathrm{h}'(\frac{1}{2}\pi - x) \le 0$，并且处处 $|y'| = -y'$。由于一条线性方程在某点给定 y 和 y' 后只有一个解，这就是解的延续。所以在 $\frac{1}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$ 上，

$$y = \mathrm{e}^{x-\pi/2}\cos x.$$

(b) 在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 处：$y = \mathrm{e}^{3\pi/4}\cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} < 0$，以及 $y' = -\mathrm{h}'(-\frac{3}{4}\pi) = 0$。此时 $y'' = -2y > 0$，所以 y' 转为正，方程变回 $y'' + 2y' + 2y = 0$。

这条方程是常系数的，所以把解平移后仍然是解。由于 $\sin(x - 2\pi) = \sin x$，函数 $\mathrm{h}(x - 2\pi) = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x$ 是它的解；而在 $[\frac{5}{4}\pi, \frac{9}{4}\pi]$ 上，它的自变量 $x - 2\pi$ 取遍 $[-\frac{3}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$，在那里 $\mathrm{h}' \geq 0$，所以它与 $y' \geq 0$ 一致。验证在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 处的接合：

$$\mathrm{e}^{2\pi - 5\pi/4}\sin\tfrac{5}{4}\pi = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4}, \qquad \mathrm{h}'(\tfrac{5}{4}\pi - 2\pi) = \mathrm{h}'(-\tfrac{3}{4}\pi) = 0,$$

两者都相配。所以在 $\frac{5}{4}\pi \leq x \leq \frac{9}{4}\pi$ 上，

$$y = \mathrm{e}^{2\pi - x}\sin x.$$

在 $x = \frac{9}{4}\pi$ 处，这等于 $\mathrm{e}^{-\pi/4}\sin\frac{1}{4}\pi = \mathrm{h}(\frac{1}{4}\pi)$，且导数为零：解回到了它在 $\frac{1}{4}\pi$ 处的状态，所以对 $x \geq \frac{1}{4}\pi$，解是周期（periodic）为 2π 的周期函数。

验算

- 各段按构造是光滑地接合的，但直接看一看也是值得的：在 $x = \frac{5}{4}\pi$ 处，(a) 和 (b) 都给出 $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\pi/4} \approx -7.4605$，斜率为零。
- 从 $y(0) = 0$、$y'(0) = 1$ 开始，以数值方法逐步推进这些含绝对值的方程，可在 $[0, 4]$ 上重现 $\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2$，并在 $[0, \frac{9}{4}\pi]$ 上重现 (v) 的三段，误差在 10^{-9} 以内。
- 直接对 (a) 求导：$y' = \mathrm{e}^{x-\pi/2}(\cos x - \sin x)$，$y'' = -2\mathrm{e}^{x-\pi/2}\sin x$，而 $y'' - 2y' + 2y = 0$，符合要求。

常见错误

- 过了转向点（turning point）后仍然保留 $|y'| = y'$：在 $x = 1$ 之后，f 本身并不是解。
- 忘记验证新的一段在整个区间上都令 y' 保持所假设的正负号。
- 在 (iv) 中把区间写成 $[r, s]$；反射会把它映射到 $[c - s, c - r]$。

STEP 之外

像这样的方程，其右边除了在一个切换曲面（这里是 $y' = 0$）两侧之外都是光滑的，称为分段光滑系统（piecewise-smooth systems）或切换系统（switching systems）；解是由线性的片段黏合而成的，而由于 $|y'|$ 是利普希茨（Lipschitz）连续的，存在性与唯一性（existence and uniqueness）仍然可由皮卡－林德洛夫定理（Picard–Lindelöf theorem）得出。(v) 中的 2π 周期性是线性阻尼方程永远不可能产生的：取 $E = \frac{1}{2}y'^2 + y^2$，我们得

到 $\mathrm{d}E/\mathrm{d}x = -2y'|y'|$，所以这个“阻尼”项在 y 上升时移走能量，在 y 下降时又把能量归还。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵盖线性理论及唯一性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。