详细解答

STEP III 2023，第 7 题

纯数学 · 积分不等式

STEP III 2023，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

连续函数（continuous function）的平方的积分永不为负，而且只有当该函数恒等于零（identically zero）时，积分才等于零。每一部分都给我们一条涉及 $\int(\text{某式})^2$ 的等式，稍作整理后，就会变成“一个完全平方的积分等于零”。第 (i) 部分为第 (ii) 部分提供工具，第 (iii) 部分由分部积分（integration by parts）担当同样角色，而在第 (iv) 部分，我们要自己通过配方（completing the square）把平方找出来。

解答

第 (i) 部分

在左边的积分中代入 $x = u^2$，于是 $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$。当 x 由 0 变到 1 时，$u \geq 0$ 同样由 0 变到 1，而且 $\sqrt{x} = u$。因此

$$\int_0^1 \mathrm{f}(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{f}(u)\,2u\,\mathrm{d}u = 2\int_0^1 x\,\mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x,$$

最后一步只是把哑变量（dummy variable）改名。这正是所求的结果。

第 (ii) 部分

在第 (i) 部分中取 $\mathrm{f} = \mathrm{g}$，已知条件就变成

$$\int_0^1 (\mathrm{g}(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

现在展开目标积分，并利用 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$：

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\mathrm{g}(x)-x)^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (\mathrm{g}(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 x\,\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 0,\end{aligned}$$

得证。

> **想一想** 为甚么积分为零就能迫使 $\mathrm{g}(x)=x$ 处处成立，而不只是“大致上”成立？

设 $\phi(x) = (\mathrm{g}(x)-x)^2$。它是连续的（因为 g 连续），而且 $\phi(x)\geq 0$。假设对某个 $c\in[0,1]$ 有 $\phi(c)>0$。由连续性，存在一个包含 c、长度为某正数 δ 的区间 $I\subseteq[0,1]$，在其上 $\phi(x)>\frac{1}{2}\phi(c)$。由于在其他地方 $\phi\geq 0$，

$$\int_0^1 \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \int_I \phi(x)\,\mathrm{d}x \;\geq\; \tfrac{1}{2}\phi(c)\,\delta > 0,$$

这是矛盾。所以对 $0\leq x\leq 1$ 中的每一个 x，都有 $\phi(x)=0$，即 $\mathrm{g}(x)=x$。（连续性确实重要：一个只在单一点与 x 不同的函数，积分仍然会是零。）

第 (iii) 部分

$2\mathrm{h}(1)-2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x$ 这一项应该令我们想起分部积分。把 $1\cdot\mathrm{h}(x)$ 分部积分，取 x 为 1 的原函数（antiderivative），

$$\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\,\mathrm{h}(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{h}(1) - \int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x.$$

所以 $2\mathrm{h}(1)-2\int_0^1 \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x$，条件变为

$$\int_0^1 (\mathrm{h}'(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x\,\mathrm{h}'(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}.$$

这恰好就是第 (ii) 部分的条件（即我们经第 (i) 部分得到的形式），只是以 h' 代替 g。重复同一论证（这需要 h' 连续，正如题目的本意），

$$\int_0^1 (\mathrm{h}'(x)-x)^2\,\mathrm{d}x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{h}'(x)=x \text{ 对于} 0\leq x\leq 1.$$

积分得 $\mathrm{h}(x)=\frac{1}{2}x^2+C$，而 $\mathrm{h}(0)=0$ 给出 $C=0$。因此

$$\mathrm{h}(x)=\tfrac{1}{2}x^2.$$

第 (iv) 部分

首先留意 $a\neq 0$，因为条件中含有 $1/a$。对照前面各部分，我们寻找一个形如 $\mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x)-\mathrm{p}(x))^2$ 的平方，使其交叉项（cross term）为 $-2\mathrm{k}(x)$。展开后交叉项为 $-2\mathrm{e}^{ax}\mathrm{p}(x)\mathrm{k}(x)$，

所以需要 $\mathrm{p}(x) = \mathrm{e}^{-ax}$：

$$\mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x) - \mathrm{e}^{-ax})^2 = \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x))^2 - 2\mathrm{k}(x) + \mathrm{e}^{-ax}.$$

在 $[0,1]$ 上积分，前两项用已知条件，最后一项用 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a}$：

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k}(x) - \mathrm{e}^{-ax})^2\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{-a}}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} + \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{a} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} - \frac{1}{4} = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{(a-2)^2}{4a^2}.\end{aligned}$$

左边是一个非负连续函数的积分，所以 ≥ 0；右边则 ≤ 0。因此两边都必须为零，迫使 $(a-2)^2 = 0$，所以 $a = 2$。

当 $a = 2$ 时，连续非负函数 $\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{k}(x) - \mathrm{e}^{-2x})^2$ 的积分为零，所以按第 (ii) 部分的论证，它在 $[0,1]$ 上处处为零。由于 $\mathrm{e}^{2x} > 0$，得

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

验算

- 第 (i) 部分取 $\mathrm{f}(x) = x$：左边为 $\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$，右边为 $2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$。
- 第 (iii) 部分：取 $\mathrm{h} = \frac{1}{2}x^2$，则 $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$，而 $2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$。两者相符。
- 第 (iv) 部分：取 $a = 2$ 及 $\mathrm{k} = \mathrm{e}^{-2x}$，左边为 $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}) \approx 0.43233$，右边为 $(1-\mathrm{e}^{-2}) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}$，两者相同。另外以电脑对随机的 a 及随机多项式 k 验证恒等式“左减右 $= \int \mathrm{e}^{ax}(\mathrm{k} - \mathrm{e}^{-ax})^2 + (a-2)^2/(4a^2)$”，结果亦相符。

常见错误

- 单凭积分为零就断定 $\mathrm{g}(x) = x$，而没有用到连续性和非负性：单是积分为零，甚么也说明不了。
- 在第 (iv) 部分，忘记说明 $a \neq 0$，或在配方之前就尝试估猜 k。

STEP 之外

$\int_0^1 \mathrm{f}(x)\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ 这个量的表现就像“向量” f 与 g 的点积 (dot product)，而 $\int_0^1 (\mathrm{g}-x)^2\,\mathrm{d}x$ 则是 g 与 x 之间距离的平方。每一部分都在说“这个距离是零”，而第 (iv) 部分中的权 e^{ax} 则给出一个加权内积（weighted inner product）。这个观点（内积空间（inner product space），以及范数（norm）为零的连续函数必为零这一事实）是大学一年级线性代数

（linear algebra）和分析（analysis）的核心内容；可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》），以及 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。