详细解答

STEP III 2023，第 6 题

纯数学 · 双曲函数与单调性

STEP III 2023，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

两个函数（function）都是 $\tan^{-1} x$ 与 $\tanh x$ 的某个倍数之差，所以它们的导数（derivative）都是 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 与 $\operatorname{sech}^2 x$ 的某个倍数之差。因此一切都归结为比较 $\cosh^2 x$ 与 $1+x^2$：(i) 中的不等式（inequality）决定了 f' 的正负号；而证明比值 $\cosh^2 x/(1+x^2)$ 是递增的，就能准确告诉我们它可以等于 $\frac{1}{2}\pi$ 多少次，而这正是 g' 等于零的地方。

解答

第 (i) 部分

利用 $\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1+\cosh 2x)$ 及 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x})$，由 e^x 的麦克劳林级数（Maclaurin series）可得（奇次幂互相抵消）

$$\cosh 2x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = 1 + 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \cdots.$$

每一项都是非负的，所以 $\cosh 2x \geq 1 + 2x^2$，因此

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2x) \geq \tfrac{1}{2}(2+2x^2) = 1+x^2,$$

等号只在 $x = 0$ 时成立（当 $x \neq 0$ 时，x^4 项严格为正）。

现在求导：

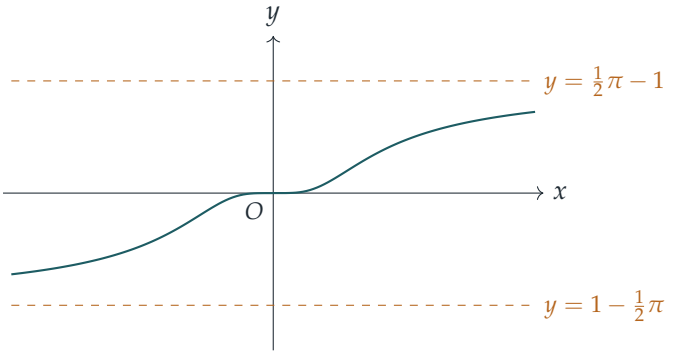
$$\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\cosh^2 x}.$$

由于 $\cosh^2 x \geq 1+x^2 > 0$，取倒数得 $\dfrac{1}{\cosh^2 x} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$，所以对所有 x 都有 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$，等号只在 $x = 0$ 处成立。一个除单一点外导数皆为正的函数是（严格）递增（increasing）

的，得证。

草图。图像上应标示的一些特征：

- f 是奇函数（odd function），因为 $\tan^{-1}$ 和 tanh 都是奇函数；而且 $\mathrm{f}(0) = 0$。
- $\mathrm{f}'(0) = 0$ 但 f 是递增的，所以原点是一个属于拐点（point of inflection）的驻点（stationary point）。事实上 $\tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ 而 $\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots$，所以在 0 附近 $\mathrm{f}(x) \approx \frac{1}{15}x^5$：图像在那里非常平坦。
- 当 $x \to \infty$ 时，$\tan^{-1} x \to \frac{1}{2}\pi$ 而 $\tanh x \to 1$，所以 $\mathrm{f}(x) \to \frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$，且从下方趋近；由奇性，当 $x \to -\infty$ 时 $\mathrm{f}(x) \to 1 - \frac{1}{2}\pi$。



第 (ii)(a) 部分

此时

$$\mathrm{g}'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\pi}{2\cosh^2 x},$$

它是连续（continuous）的偶函数（even function）。在 $x = 0$ 处，$\mathrm{g}'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$。在 $x = 2$ 处，

$$\mathrm{g}'(2) = \tfrac{1}{5} - \frac{\pi}{2\cosh^2 2},$$

而 $\cosh 2 > \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 > 3.6$，所以 $\cosh^2 2 > 12.9$ 及 $\dfrac{\pi}{2\cosh^2 2} < \dfrac{1.6}{12.9} < \frac{1}{5}$；因此 $\mathrm{g}'(2) > 0$。由介值定理（intermediate value theorem），g' 在 $(0, 2)$ 内有一个零点；又因 g' 是偶函数，它在 $(-2, 0)$ 内还有另一个零点。所以 g 至少有两个驻点。

第 (ii)(b) 部分

设 $h(x) = (1+x^2)\sinh x - x\cosh x$。则

$$\begin{aligned} h'(x) &= 2x\sinh x + (1+x^2)\cosh x - \cosh x - x\sinh x \\ &= x\sinh x + x^2\cosh x. \end{aligned}$$

当 $x \geq 0$ 时，$x\sinh x$ 和 $x^2\cosh x$ 都是非负的（当 $x > 0$ 时更是正的），所以 h 在 $[0,\infty)$ 上递增。由于 $h(0) = 0$，对 $x \geq 0$ 得 $h(x) \geq 0$；事实上，对 $x > 0$ 有 $h(x) > 0$。

第 (ii)(c) 部分

由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh^2 x}{1+x^2}\right) = \frac{2\cosh x\sinh x\,(1+x^2) - 2x\cosh^2 x}{(1+x^2)^2} = \frac{2\cosh x\,h(x)}{(1+x^2)^2}.$$

当 $x \geq 0$ 时，$\cosh x > 0$，而由 (b) 得 $h(x) \geq 0$，所以导数非负；它只在 $x = 0$ 处为零。因此当 $x \geq 0$ 时，$\cosh^2 x/(1+x^2)$ 是（严格）递增的。

第 (ii)(d) 部分

> ? **想一想** 关于 $\cosh^2 x/(1+x^2)$ 的命题，怎样可以用来数出 g' 的零点个数?

将 $\mathrm{g}'(x) = 0$ 两边乘以正数 $(1+x^2)\cosh^2 x$，可见

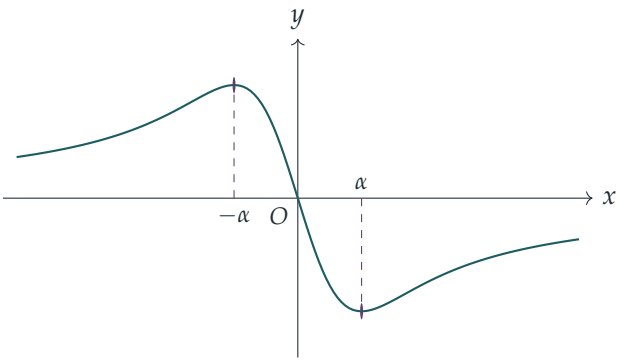
$$\mathrm{g}'(x) = 0 \iff \frac{\cosh^2 x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

记 $R(x) = \cosh^2 x/(1+x^2)$。在 $[0,\infty)$ 上，R 连续，且由 (c) 知其严格递增，又 $R(0) = 1 < \frac{1}{2}\pi$，所以 R 在该区间上最多只取值 $\frac{1}{2}\pi$ 一次；由 (a)，它确实取到此值，取值点为某个 α，其中 $0 < \alpha < 2$。所以 g' 在 $[0,\infty)$ 内恰有一个零点。由于 R 是偶函数，$x < 0$ 时的零点正是 $x > 0$ 时零点的相反数，因此恰好还有一个零点，位于 $-\alpha$。所以 g 恰有两个驻点，位于 $x = \pm\alpha$（数值上 $\alpha \approx 1.406$）。

第 (ii)(e) 部分

综合已知事实：

- g 是奇函数，$\mathrm{g}(0) = 0$，且 $\mathrm{g}'(0) = 1 - \frac{1}{2}\pi < 0$。
- 由 (d)，在 $(-\alpha,\alpha)$ 上 $\mathrm{g}' < 0$（因为那里 $R < \frac{1}{2}\pi$），而当 $|x| > \alpha$ 时 $\mathrm{g}' > 0$。所以在 $x = -\alpha$ 处有局部极大值（local maximum），在 $x = \alpha$ 处有局部极小值（local minimum），且 $\mathrm{g}(\alpha) = -\mathrm{g}(-\alpha) < 0$（约为 -0.44）。
- 当 $x \to \infty$ 时，$\mathrm{g}(x) \to \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\pi\cdot 1 = 0$。由于 g 在 (α,∞) 上递增并趋向极限 0，它在那里保持为负：图像从下方趋近 x 轴。由奇性，当 $x \to -\infty$ 时 $\mathrm{g}(x) \to 0$，且从上方趋近。
- 所以 g 唯一的零点在原点：当 $x < 0$ 时 $\mathrm{g} > 0$，当 $x > 0$ 时 $\mathrm{g} < 0$。



验算

- 在 $x = 1$ 处：$\cosh^2 1 \approx 2.381 \geq 2$，与 (i) 一致。
- $\mathrm{f}(30) \approx 0.537$，从下方趋近 $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.571$；而 $\mathrm{f}(0.1) \approx 6.6 \times 10^{-7}$，接近 $\frac{1}{15}(0.1)^5$。
- 数值求解 $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\pi(1 + x^2)$ 得 $\alpha \approx 1.406$，正如 (a) 所预测般位于 $(0, 2)$ 内，且 $\mathrm{g}(\alpha) \approx -0.440$。在 $[-20, 20]$ 上对 g' 作精细扫描，恰好找到两次变号；而 $\mathrm{g}(20) \approx -0.050$ 是一个很小的负数，与草图相符。

常见错误

- 忘记 $\cosh^2 x \geq 1 + x^2$ 必须反转为 $\operatorname{sech}^2 x \leq \dfrac{1}{1 + x^2}$；这样做之所以成立，是因为两边都是正数。
- 在 (d) 中只证明了有一个正根，却忘记利用偶性（或指出 $x = 0$ 不是根）来数出那个负根。
- 画 g 的草图时，用了 $y = 0$ 以外的渐近线（asymptote），或在 x 很大时再次穿过坐标轴；(α, ∞) 上的单调性（monotonicity）排除了这种情况。

STEP 之外

(ii) 中的方法（把“$\mathrm{g}' = 0$ 有多少个解？”转化为“一个单调函数取某个值多少次？”）是分析学家数根的基本方法：连续性加上介值定理给出存在性，严格单调性则给出唯一性。这些想法会在第一门分析（analysis）课程中得到严谨处理；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是观看这些论证被仔细展开的绝佳之选。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。