详细解答

STEP III 2023，第 5 题

纯数学 · 数论

STEP III 2023，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

每一部分都把一条整数方程化为一个乘积（product），令它等于一个我们完全清楚其因数（factor）的数：先是 49，然后是 pq，再然后是 $3p^2q$。一旦方程的一边是两个整数的乘积，每个因数的大小（哪一个较大、哪一个小于 p）就能把可能情况缩减至一两种。在第 (iii) 部分，我们能控制的因数是 $p+q-n$，而题目要求证明的不等式（inequality），正正就是阻止它与 p 或 q 有公因数的条件。

解答

第 (i) 部分

两边乘以 $7xy$（两者皆非零），得

$$7y+14x=2xy \quad \Longleftrightarrow \quad 2xy-14x-7y=0.$$

由于 $(2x-7)(y-7)=2xy-14x-7y+49$，两边加上 49 便得 $(2x-7)(y-7)=49$，此即所求。

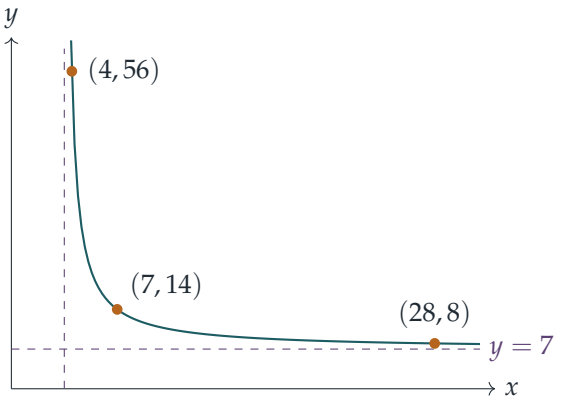
现设 x 和 y 为正整数。那么 $2x-7$ 和 $y-7$ 是乘积为 49 的整数，所以它们是 49 的一组因数对（factor pair）：

$$(2x-7,\ y-7)\in\{(1,49),\,(7,7),\,(49,1),\,(-1,-49),\,(-7,-7),\,(-49,-1)\}.$$

正数条件排除了负数的因数对：$x\geq 1$ 迫使 $2x-7\geq -5$，而 $y\geq 1$ 迫使 $y-7\geq -6$，所以两个因数都不可能是 -7 或 -49，而每一组负数因数对都含有其中之一。正数的因数对给出

$$(x,y)=(4,56),\quad (7,14),\quad (28,8),$$

而每一组都确实满足原方程，例如 $\frac{1}{4}+\frac{2}{56}=\frac{7}{28}+\frac{1}{28}=\frac{2}{7}$。



这条曲线是一条直角双曲线（rectangular hyperbola），渐近线（asymptote）为 $x=\frac{7}{2}$ 和 $y=7$；三个解就是它正分支上的格点（lattice point）。

第 (ii) 部分

展开得 $(p+q)^2=p^2+2pq+q^2=n^2+pq$，所以

$$(p+q+n)(p+q-n)=(p+q)^2-n^2=pq.$$

右方为正数，而 $p+q+n>0$，所以 $p+q-n$ 是一个正整数。pq 的正因数是 $1,p,q,pq$（若 $p=q$ 则只有 $1,p,p^2$），而 $p+q+n$ 是其中之一。但 $n>0$ 表示 $p+q+n>p$ 及 $p+q+n>q$，所以 $p+q+n$ 既不是 p 也不是 q；剩下的因数只有 pq。因此 $p+q+n=pq$，而另一个因数（co-factor）是

$$p+q-n=1, \qquad \text{即} \qquad p+q=n+1.$$

把 $n=p+q-1$ 代入 $p+q+n=pq$，得 $2p+2q-1=pq$，整理后得

$$pq-2p-2q+4=3 \iff (p-2)(q-2)=3.$$

质数（prime）满足 $p-2\geq 0$，所以两个因数皆非负，而乘积为 3，故 $\{p-2,q-2\}=\{1,3\}$。因此

$$(p,q)=(3,5) \quad \text{或} \quad (5,3),$$

而事实上 $9+15+25=49=7^2$，且 $n=7=3+5-1$。

第 (iii) 部分

这里 n 是 $p^3+q^3+3pq^2$ 的正实数立方根（cube root）。

不等式。由于 $p,q>0$,

$$n^3=q^3+(p^3+3pq^2)>q^3,\qquad n^3=p^3+(q^3+3pq^2)>p^3,$$

而立方函数是严格递增（strictly increasing）的，所以 $n>q$ 及 $n>p$。整理后分别得 $p+q-n<p$ 及 $p+q-n<q$。我们亦需要下界（lower bound）：

$$(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=n^3+3p^2q>n^3,$$

所以 $p+q>n$，即 $p+q-n>0$。

没有质数解。假设 p 和 q 是质数，而 n 是整数。设 $d=p+q-n$，这是一个整数，且

$$0<d<p,\qquad 0<d<q.$$

由上面的展开式，$(p+q)^3-n^3=3p^2q$，再用立方差（difference of cubes）因式分解，

$$d\left((p+q)^2+(p+q)n+n^2\right)=3p^2q,$$

所以 d 整除 $3p^2q$。

想一想 为甚么 d 不能与 p 或 q 有公因数?

因为 p 是质数，d 与 p 有公因数的唯一可能，是 p 整除 d，而这需要 $d\geq p$。但 $d<p$。同理，$d<q$ 表示 q 不整除 d。所以 d 与 p^2q 互质（coprime），而 $d\mid 3p^2q$ 便迫使 $d\mid 3$。这正是那些不等式的用处。因此 $d=1$ 或 $d=3$。设 $s=p+q$。

情况 $d=1$。此时 $n=s-1$，且

$$3p^2q=s^3-(s-1)^3=3s^2-3s+1,$$

这是不可能的：左方是 3 的倍数，而右方除以 3 的余数是 1。

情况 $d=3$。此时 $3=d<p$ 及 $3<q$，所以 p 和 q 都不是 3。这里 $n=s-3$，且

$$3p^2q=s^3-(s-3)^3=9s^2-27s+27,\qquad \text{所以}\qquad p^2q=3(s^2-3s+3).$$

因此 $3\mid p^2q$，而由于 3 是质数，它整除 p 或 q，使其中一个等于 3。这与 $p,q>3$ 矛盾。

两种情况都不可能，所以不存在质数 p 和 q 使得 $p^3+q^3+3pq^2$ 是某整数的立方。 ■

验算

对所有正整数 $x,y<2000$ 进行穷举搜索（brute-force search），恰好找到第 (i) 部分的三组解。在所有质数 $p,q<1500$ 之中，p^2+pq+q^2 只在 $\{p,q\}=\{3,5\}$ 时才是完全平方数（perfect square）（得 49），而 $p^3+q^3+3pq^2$ 从来不是完全立方数。随机抽取的正实数确认了第 (iii) 部分中的 $0<p+q-n<\min(p,q)$。第 (ii) 部分的快速人手验算：$(3+5+7)(3+5-7)=15\times 1=15=pq$。

常见错误

- 在第 (i) 部分忘记 49 的负数因数对。它们在这里不产生任何解，但必须把它们排除，而不是置之不理。
- 在第 (ii) 部分，未经论证便假设 $p+q-n$ 是较小的因数且为正数：两者都由 $n>0$ 及 $pq>0$ 推出，而且需要写明。
- 在第 (iii) 部分，停在 $d \mid 3$。$d=1$ 和 $d=3$ 两种情况仍然要排除，而第二种情况需要再次用到 $d<p,q$ 这个事实。

STEP 之外

每一部分都用了同一个技巧：把一条丢番图方程（Diophantine equation）改写成若干整数的乘积，令它等于一个已知其因数分解的数，然后利用大小和互质性确定各个因数。第 (i) 部分属于埃及分数（Egyptian fraction）方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ 这一类，而第 (ii) 部分则关于含有一个 120° 角的整数边三角形，因为 $p^2+pq+q^2=n^2$ 正是该角的余弦定律（cosine rule）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是这类初等数论（elementary number theory）的一本绝佳入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。