详细解答

STEP III 2023，第 4 题

纯数学 · 切比雪夫多项式的系数

STEP III 2023，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

把 $\cos((2n+1)\theta)$ 写成 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{2n+1}$ 的实部，就能把 p 化成一个明确的和式，而 p 的每个系数都变成二项式系数（binomial coefficient）之和。形如 $\sum\binom{N}{2r}$ 或 $\sum r\binom{N}{2r}$、只取偶数下标的和，可以把 $t=1$ 和 $t=-1$ 代入 $(1+t)^N$（或其导数（derivative）），再相加或相减求得，因为这样奇数下标的项会互相抵消。最后一部分则比较因式分解（factorisation）两边最高的几个系数。

解答

全文中记 $c=\cos\theta$ 及 $s=\sin\theta$。

第 (i) 部分

由棣美弗定理（de Moivre's theorem）及二项式定理（binomial theorem），

$$\cos((2n+1)\theta) + \mathrm{i}\sin((2n+1)\theta) = (c+\mathrm{i}s)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}c^{2n+1-k}(\mathrm{i}s)^k.$$

由于 c 和 s 是实数，实数项恰好是 k 为偶数的那些项，设 $k=2r$，其中 $0\le r\le n$，此时 $(\mathrm{i}s)^{2r} = (-1)^r s^{2r} = (-s^2)^r = (c^2-1)^r$。取实部，得

$$\cos((2n+1)\theta) = \sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{2r}\cos^{2n+1-2r}\theta\,(\cos^2\theta - 1)^r,$$

即为所求。

第 (ii) 部分

由第 (i) 部分可知，对每个 $x = \cos\theta \in [-1,1]$，都有

$$\mathrm{p}(x) = 1 + \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r} x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$$

两边都是多项式（polynomial），且在无限多个点上相等，所以它们是同一个多项式。

第 r 项的次数是 $(2n+1-2r)+2r = 2n+1$，首项系数（leading coefficient）为 $\binom{2n+1}{2r}$，而常数 1 不影响 x^{2n+1}。所以 p 中 x^{2n+1} 的系数是

$$S_0 = \sum_{r=0}^{n} \binom{2n+1}{2r},$$

即偶数下标二项式系数之和。把 $t=1$ 和 $t=-1$ 代入 $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$，得

$$2^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k}, \qquad 0 = \sum_k (-1)^k \binom{2n+1}{k}.$$

两式相加，k 为奇数的项互相抵消，k 为偶数的项则加倍：$2S_0 = 2^{2n+1}$。因此 $\mathrm{p}(x)$ 中 x^{2n+1} 的系数是 $S_0 = 2^{2n}$。

第 (iii) 部分

在第 r 项 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ 中，要得到 x^{2n-1}，需要取 $(x^2-1)^r$ 的 x^{2r-2} 项。该项是 $\binom{r}{1}(x^2)^{r-1}(-1) = -rx^{2r-2}$（当 $r=0$ 时此项不存在，与 $-r=0$ 一致）。由于 $n \geq 1$，有 $2n-1 \geq 1$，所以 p 中的常数 1 不起作用。因此 x^{2n-1} 的系数是

$$-\sum_{r=0}^{n} r \binom{2n+1}{2r}.$$

? **想一想** 当每个偶数下标项都以 r 加权时，怎样才能把它们挑出来?

微分会把下标作为因子拉下来。由 $(1+t)^{2n+1} = \sum_k \binom{2n+1}{k} t^k$，得

$$(2n+1)(1+t)^{2n} = \sum_{k=1}^{2n+1} k \binom{2n+1}{k} t^{k-1}.$$

在 $t=1$ 时，得 $\sum_k k\binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n}$。在 $t=-1$ 时，左边为 0（因为 $2n \geq 1$），所以

$$0 = \sum_k (-1)^{k-1} k \binom{2n+1}{k} = \sum_{k\text{ 奇数}} k \binom{2n+1}{k} - \sum_{k\text{ 偶数}} k \binom{2n+1}{k}.$$

所以 k 为偶数和 k 为奇数的两部分相等，各占总和的一半：

$$\sum_{k\text{ 偶数}} k \binom{2n+1}{k} = (2n+1)2^{2n-1}.$$

令 $k=2r$，这即是 $\sum_r 2r\binom{2n+1}{2r}=(2n+1)2^{2n-1}$，亦即 $\sum_r r\binom{2n+1}{2r}=(2n+1)2^{2n-2}$。因此 $\mathrm{p}(x)$ 中 x^{2n-1} 的系数是 $-(2n+1)2^{2n-2}$，即为所求。

第 (iv) 部分

首项系数。由 (ii)，p 的次数是 $2n+1$，首项系数为 2^{2n}。若 q 的次数是 m、首项系数是 a，则 $(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ 的次数是 $2m+1$，首项系数是 a^2。所以 $m=n$ 及 $a^2=2^{2n}$，又因 $a>0$，q 中 x^n 的系数是 2^n。

关于 p 的另一个事实。每一项 $x^{2n+1-2r}(x^2-1)^r$ 都只含 x 的奇次幂，因为 $x^{2n+1-2r}$ 是奇次幂，而 $(x^2-1)^r$ 只有偶次幂。p 中唯一的偶次幂是常数 1。由于 $2n\geq 2$，p 中 x^{2n} 的系数是 0。

比较系数。现设 $n\geq 2$，并写

$$\mathrm{q}(x)=2^n x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots,$$

于是

$$[\mathrm{q}(x)]^2=2^{2n}x^{2n}+2^{n+1}b\,x^{2n-1}+(b^2+2^{n+1}c)x^{2n-2}+\cdots.$$

乘以 $x+1$ 后，$(x+1)[\mathrm{q}(x)]^2$ 中 x^{2n} 和 x^{2n-1} 的系数分别是

$$2^{n+1}b+2^{2n}\qquad 及\qquad (b^2+2^{n+1}c)+2^{n+1}b.$$

p 中 x^{2n} 的系数是 0，所以 $b=-2^{2n}/2^{n+1}=-2^{n-1}$。于是 $b^2=2^{2n-2}$ 及 $2^{n+1}b=-2^{2n}$，再把 x^{2n-1} 的系数与第 (iii) 部分的结果比较，得

$$2^{2n-2}+2^{n+1}c-2^{2n}=-(2n+1)2^{2n-2}.$$

整理得

$$2^{n+1}c=2^{2n-2}(-(2n+1)-1+4)=2^{2n-2}(2-2n)=2^{2n-1}(1-n),$$

所以 q 中 x^{n-2} 的系数是

$$c=2^{n-2}(1-n),$$

即为所求。

验算

- 当 $n=1$：$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$，所以 $\mathrm{p}(x)=4x^3-3x+1=(x+1)(2x-1)^2$。首项系数是 2^2，x 的系数是 $-3=-3\cdot 2^0$，而 q 的首项系数是 2^1。
- 当 $n=2$：$\mathrm{p}(x)=16x^5-20x^3+5x+1=(x+1)(4x^2-2x-1)^2$。$x^3$ 的系数是 $-20=-5\cdot 2^2$，而 q 的常数项是 $-1=2^0(1-2)$。

- 当 $n=3$, 我们求得 $\mathrm{q}(x)=8x^3-4x^2-4x+1$, 其中 x 的系数等于 $-4=2^1(1-3)$。我们亦用电脑验证过：对 $n=1,\ldots,12$, 精确展开 $\cos\big((2n+1)\theta\big)+1$, 再求 $\mathrm{p}(x)/(x+1)$ 的平方根，每条系数公式都成立。

常见错误

- 忘记 p 的 x^{2n} 系数。它是 0，而正是这一点确定了 q 的 x^{n-1} 系数 b，要求 c 必须先知道它。
- 写成 $(\mathrm{i}s)^{2r}=s^{2r}$，漏掉了符号 $(-1)^r$。正是这个符号令结果是 $\cos^2\theta-1$ 而不是 $1-\cos^2\theta$。
- 在 (iii) 中只把 $t=1$ 代入导数，这样得到的是对所有 k 的和，而不只是偶数项的和。

STEP 之外

满足 $T_N(\cos\theta)=\cos N\theta$ 的多项式 T_N 就是 N 次的切比雪夫多项式（Chebyshev polynomial），而第 (ii) 和 (iii) 部分求出了它最高的两个系数。(iv) 中的因式分解反映了一个事实：$T_{2n+1}(x)+1$ 在 $x=-1$ 处有一个单根（simple root），而在其他每个使 $\cos\big((2n+1)\theta\big)=-1$ 的点处都有一个重根（double root）。切比雪夫多项式在逼近理论（approximation theory）中处于核心地位：在所有 N 次首一多项式（monic polynomial）之中, $2^{1-N}T_N$ 在 $[-1,1]$ 上的最大绝对值最小。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）有更多同类题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。