详细解答

STEP III 2023，第 3 题

纯数学 · 三次方程的复数根

STEP III 2023，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

以 a 为基准点量度，三点分别是 $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$ 和 b。乘以 i 会把向量（vector）转一个直角，所以 a 是底边的中点，而 b 沿着对称轴方向。有了这个图像，第 (ii) 部分只需运用韦达定理（Vieta's formulas）：各根之和为零，由此可用 a 表示 b，然后 a 在 p^3/q^2 中消去。第 (iii) 及 (iv) 部分把结果化为关于 $x = s^2 > 0$ 的单变量函数（function），从其图像可看出它最小可以是多少。

解答

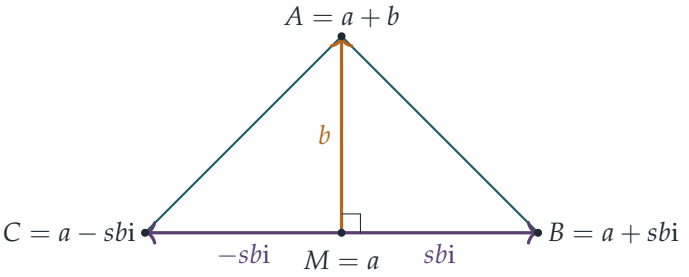
第 (i) 部分

由 $a + b$ 到另外两点的距离为

$$|(a + sb\mathrm{i}) - (a + b)| = |b|\,|s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1},$$
$$|(a - sb\mathrm{i}) - (a + b)| = |b|\,|-s\mathrm{i} - 1| = |b|\sqrt{s^2 + 1}.$$

两者相等。我们还需要确认三点确实构成一个三角形。相对于 a，三点是 $sb\mathrm{i}$、$-sb\mathrm{i}$ 和 b。前两点互不相同（因为 $s > 0$ 且 $b \neq 0$），并且位于经过 a、方向为 $b\mathrm{i}$ 的直线上。由于 $b\mathrm{i}$ 是 b 转了一个直角，而 $b \neq 0$，所以第三点 $a + b$ 不在该直线上。因此这三点构成一个等腰三角形（isosceles triangle），顶点为 $a + b$，底边由 $a - sb\mathrm{i}$ 到 $a + sb\mathrm{i}$，底边中点为 a。

还原 a、b、s。设三角形的顶点为 A（即两条等边相交的顶点；若是等边三角形，任取一个顶点即可），其余两个顶点为 B、C。设 M 为 BC 的中点。



- 取 $a = M = \frac{1}{2}(B + C)$。
- 取 $b = A - M$。由于 A 不在 BC 上，这不等于零。
- 由于 $AB = AC$,A 位于 BC 的垂直平分线(perpendicular bisector)上,所以 $MB \perp MA$。因此 $B - M$ 是把 b 转一个直角再伸缩所得：对某个实数 $\lambda \neq 0$，有 $B - M = \lambda b\mathrm{i}$。若 $\lambda < 0$，就把 B 和 C 的标记互换，这会改变 λ 的正负号。于是 $s = \lambda > 0$ 为

$$s = \frac{MB}{MA} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\text{三角形的高}}.$$

于是 $a + b = A$、$a + sb\mathrm{i} = B$ 及 $a - sb\mathrm{i} = M - (B - M) = C$，符合所求。

第 (ii) 部分

由第 (i) 部分，可把各根记为 $a + sb\mathrm{i}$、$a - sb\mathrm{i}$、$a + b$，其中 $b \neq 0$、$s > 0$。这个三次方程没有 z^2 项，所以各根之和为零：

$$3a + b = 0, \qquad \text{所以} b = -3a,$$

而因为 $b \neq 0$，所以 $a \neq 0$。因此各根为

$$a(1 - 3s\mathrm{i}), \qquad a(1 + 3s\mathrm{i}), \qquad -2a.$$

前两个根之积为 $a^2(1 + 9s^2)$，和为 $2a$。所以由韦达定理,

$$p = a^2(1 + 9s^2) + (-2a)(2a) = a^2(9s^2 - 3) = 3a^2(3s^2 - 1),$$
$$q = -\big(\text{各根之积}\big) = -(-2a)\,a^2(1 + 9s^2) = 2a^3(9s^2 + 1).$$

由于 $a \neq 0$，所以 $q \neq 0$，可以相除：

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27a^6(3s^2 - 1)^3}{4a^6(9s^2 + 1)^2} = \frac{27(3s^2 - 1)^3}{4(9s^2 + 1)^2},$$

其中 s 是非零（事实上是正的）实数，符合所求。

第 (iii) 部分

设 $y = \dfrac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}$，定义域为 $x \neq -\frac{1}{9}$。由商法则（quotient rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{9(3x-1)^2(9x+1)^2 - (3x-1)^3 \cdot 18(9x+1)}{(9x+1)^4} \\ &= \frac{9(3x-1)^2\big[(9x+1) - 2(3x-1)\big]}{(9x+1)^3} = \frac{27(3x-1)^2(x+1)}{(9x+1)^3}.\end{aligned}$$

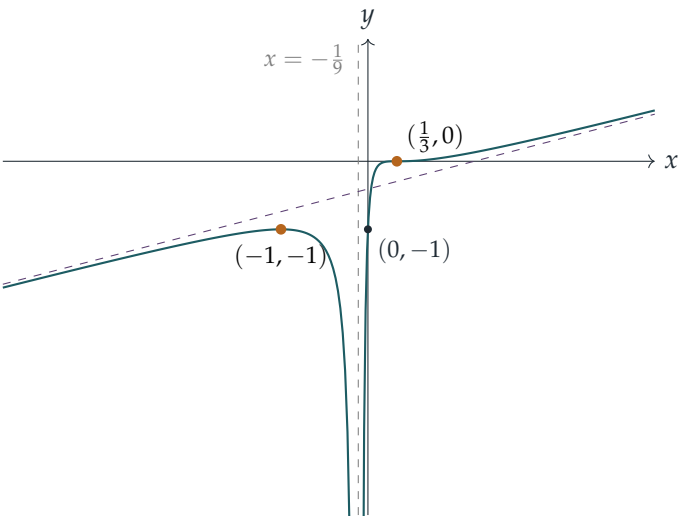
所以驻点（stationary point）位于 $x = -1$ 及 $x = \frac{1}{3}$。

- 在 $x = -1$：$y = (-4)^3/(-8)^2 = -1$。当 $x < -1$ 时，因子 $x+1$ 和 $(9x+1)^3$ 皆为负，所以 $y' > 0$。当 $-1 < x < -\frac{1}{9}$ 时，只有 $(9x+1)^3$ 为负，所以 $y' < 0$。因此 $(-1,-1)$ 是**局部极大点**（local maximum）。
- 在 $x = \frac{1}{3}$：$y = 0$。在其两侧（对 $x > -\frac{1}{9}$），除 $(3x-1)^2$ 外每个因子皆为正，而当 $x \neq \frac{1}{3}$ 时 $(3x-1)^2 > 0$。所以两侧皆有 $y' > 0$，因此 $(\frac{1}{3}, 0)$ 是**驻拐点**（stationary point of inflection）。

特别地，y 在 $x > -\frac{1}{9}$ 上严格递增（strictly increasing），因为除单一点 $x = \frac{1}{3}$ 外，该处皆有 $y' > 0$。

其他特征：

- 垂直渐近线（vertical asymptote）$x = -\frac{1}{9}$。在该处分子趋向 $(-\frac{4}{3})^3 < 0$，分母趋向 0^+，所以从两侧皆有 $y \to -\infty$。
- 把 $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$ 除以 $81x^2 + 18x + 1$，得商式 $\frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$，所以当 $x \to \pm\infty$ 时，$y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$ 是一条斜渐近线（oblique asymptote）。
- 曲线与坐标轴相交于 $(0,-1)$ 及 $(\frac{1}{3}, 0)$。



虚线是斜渐近线 $y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{27}$。左支永不高于 -1。右支由 $-\infty$ 递增，经过每一个实数值。

第 (iv) 部分

由第 (ii) 部分，取该部分所得的实数 $s \neq 0$，并设 $x = s^2$，

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2}.$$

由于 s 是实数，右方是实数，因此 p^3/q^2 亦是实数。

> **想一想** 图像向下伸延至 $-\infty$，那么为甚么 p^3/q^2 不能是很大的负数?

因为 $x = s^2$ 并非任意实数：s 是非零实数，所以 $x > 0$。因此我们关心的 x 值都位于右支上，而（由第 (iii) 部分）y 在右支上严格递增。所以对 $x > 0$，

$$\frac{(3x-1)^3}{(9x+1)^2} > \frac{(0-1)^3}{(0+1)^2} = -1,$$

因此

$$\frac{p^3}{q^2} > -\frac{27}{4}.$$

这个不等式（inequality）是严格的，因为 $x = 0$（即 $s = 0$）被排除了：那会使三角形退化成一条线段。

验算

- 等边三角形：$z^3 - 1 = 0$ 的根构成一个等边三角形（equilateral triangle）。此时 $p = 0$，而公式给出 $p = 0$ 当且仅当 $s^2 = \frac{1}{3}$，即底边的一半等于高的 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 倍，这正是等边三角

形的形状。

- 一个具体例子：$a = 1$、$s = 1$ 给出根 $1 \pm 3\mathrm{i}$ 及 -2，所以方程为 $z^3 + 6z + 20 = 0$。于是 $p^3/q^2 = 216/400 = \frac{27}{50}$，而公式给出 $\frac{27 \cdot 8}{4 \cdot 100} = \frac{27}{50}$。
- 当 $s \to 0$ 时，三角形压扁，趋向在 a 处的二重根，而 $p^3/q^2 \to -\frac{27}{4}$：$4p^3 + 27q^2 = 0$ 正是有重根（repeated root）的条件。当 $s = 10^{-4}$ 时，其值约为 -6.749998。
- 以电脑检验了随机生成、形心（centroid）在原点的等腰三角形：p^3/q^2 总是实数，且大于 -6.75。

常见错误

- 在第 (i) 部分把 a 和 b 当作实数。它们是复数，所以三角形可以朝任何角度摆放。
- 弄错 q 的正负号：对首一三次多项式（monic cubic）而言，q 是各根之积的负数。
- 在第 (iv) 部分使用整个图像，忘记了 $x = s^2 > 0$，而正是这一点使我们停留在右支上。

STEP 之外

量 $-(4p^3 + 27q^2)$ 是这个三次多项式的判别式（discriminant），而 p^3/q^2 是一个形状不变量（invariant）：当各根绕其形心旋转或伸缩时，它保持不变（把 z 换成 kz，会使 p 乘以 k^2、q 乘以 k^3），所以它只记录了根所构成三角形的形状。这类不变量是在变量变换下对多项式进行分类的起点。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是一本出色的指南，教你像本题所要求那样，以几何方式思考复数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。