详细解答

STEP III 2023，第 2 题

纯数学 · 极坐标曲线的面积

STEP III 2023，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

两条曲线都是由一条从 $\theta = 0$ 扫到 $\theta = \pi$ 的半径画出来的，所以整道题目的重点在于：在每个角度上，哪一条曲线离原点较远。比较 $k(1+\sin\theta)$ 与 $k+\cos\theta$，可见两者恰好在 $\theta = \alpha$ 处交换一次位置。于是 A 与 B 两个区域合起来，正是两条曲线所围区域的重叠部分；而所有面积都来自极坐标（polar coordinates）面积公式 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$，其中 $\sin^2$ 和 $\cos^2$ 用倍角公式（double angle formulae）处理。

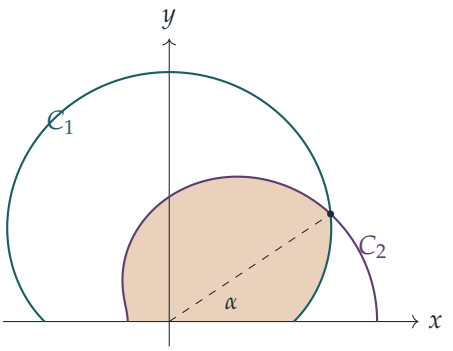
解答

第 (i) 部分

先算一些数值，有助作草图：

	$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = \pi$
C_1: $r = k(1+\sin\theta)$	k	$2k$	k
C_2: $r = k+\cos\theta$	$k+1$	k	$k-1$

由于 $k > 1$，两个半径在整个范围内都是正数。C_1 是心脏线（cardioid）的上半部分，关于 y 轴对称，最高到达 $(0, 2k)$。C_2 是一个稍微压扁、“半径约为 k”的半圆，在 $\theta = 0$ 处向右推出 1 个单位，在 $\theta = \pi$ 处向内收入 1 个单位。下图取 $k = 1.5$；阴影部分是两条曲线所围区域的重叠部分。



在交点处两个半径相等，所以

$$k(1+\sin\alpha) = k+\cos\alpha \iff k\sin\alpha = \cos\alpha.$$

这里 $\cos\alpha \neq 0$（否则便需要 $k\sin\alpha = 0$，但此时 $\sin\alpha = \pm 1$），因此两边相除得 $\tan\alpha = \dfrac{1}{k}$，即所求。由于 $0 < \frac{1}{k} < 1$，在 $[0,\pi]$ 内恰好有一个这样的角，而且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$。

更有用的是，$k+\cos\theta - k(1+\sin\theta) = \cos\theta - k\sin\theta$，它在 $0 \leq \theta < \alpha$ 时为正，在 $\alpha < \theta \leq \pi$ 时为负（利用下面 $\sin\alpha$、$\cos\alpha$ 的值，它等于 $\sqrt{1+k^2}\,\sin(\alpha-\theta)$，而 $\alpha-\theta$ 分别落在 $(0,\alpha]$ 或 $[\alpha-\pi,0)$ 之内）。所以在 α 之前 C_2 在 C_1 之外，在 α 之后则在 C_1 之内。

我们亦会用到由 $\tan\alpha = \frac{1}{k}$ 得出的

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

第 (ii) 部分

区域 A 是在 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 时，由伸到 C_1 的半径扫出来的，所以其面积为

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\int_0^\alpha k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{k^2}{2}\int_0^\alpha \left(1+2\sin\theta+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{k^2}{2}\left[\tfrac{3}{2}\theta - 2\cos\theta - \tfrac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^\alpha \\
&= \frac{k^2}{2}\left(\tfrac{3}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\right) \\
&= \frac{k^2}{4}(3\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) + k^2(1-\cos\alpha),
\end{aligned}$$

这里用了 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$ 和 $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$。这正是所求的表达式。

第 (iii) 部分

同样地，利用 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$，B 的面积为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi}(k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\pi}\left(k^2+\frac{1}{2}+2k\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(k^2+\frac{1}{2}\right)\theta+2k\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\alpha}^{\pi}\\ &= \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-k\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha.\end{aligned}$$

如果想消去 α 的三角函数,可用第 (i) 部分的数值:$k\sin\alpha = \dfrac{k}{\sqrt{1+k^2}}$,$\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{k}{1+k^2}$,所以

$$\text{B 的面积} = \frac{(2k^2+1)(\pi-\alpha)}{4}-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}-\frac{k}{4(1+k^2)}.$$

第 (iv) 部分

想一想 A 与 B 合起来的区域是甚么形状?

由第 (i) 部分，当 $\theta<\alpha$ 时，A 的边界是位于内侧的曲线 C_1；当 $\theta>\alpha$ 时，B 的边界是位于内侧的曲线 C_2。所以 R 是两个区域重叠部分的面积（即草图中的阴影部分）。这已经提示了答案：当 k 很大时，C_2 几乎完全位于 C_1 之内，所以重叠部分应该差不多就是整个 T。

整个区域的面积可由同样的积分在 $[0,\pi]$ 上计算得出（$\sin\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 项在两端都给出 0；$-2\cos\theta$ 给出 4）:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(k+\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi(2k^2+1)}{4},\qquad S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}k^2(1+\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{k^2(3\pi+8)}{4}.$$

当 $k\to\infty$ 时，$\alpha=\arctan\frac{1}{k}\to 0$。与其展开 A，不如为它找一个上界：在 $[0,\alpha]$ 上有 $r=k(1+\sin\theta)\le 2k$，所以 A 位于一个半径为 $2k$、圆心角为 α 的扇形（sector）之内；又因为 $\alpha<\tan\alpha=\frac{1}{k}$，

$$0<\text{A 的面积}\le\tfrac{1}{2}(2k)^2\alpha<2k.$$

因此 $\dfrac{\mathrm{A}}{T}<\dfrac{8k}{\pi(2k^2+1)}\to 0$。至于 B，把第 (iii) 部分的结果除以 T，

$$\frac{\mathrm{B}}{T}=\frac{\pi-\alpha}{\pi}-\frac{4\left(k\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha\right)}{\pi(2k^2+1)}\to 1-0=1,$$

因为 $\alpha\to 0$，而且 $0<k\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin\alpha\cos\alpha<k+1$，与 $2k^2+1$ 相比微不足道。因此

$$\frac{R}{T}=\frac{\mathrm{A}}{T}+\frac{\mathrm{B}}{T}\to 1.$$

最后

$$\frac{R}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{T}{S} = \frac{R}{T}\cdot\frac{\pi(2k^2+1)}{k^2(3\pi+8)} \to 1\cdot\frac{2\pi}{3\pi+8} = \frac{2\pi}{3\pi+8}.$$

验算

- 在 $\theta = 0$ 处，C_2（$r = k+1$）在 C_1（$r = k$）之外；在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处则在其内（$k < 2k$），所以两条曲线必定在两者之间相交，与 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 一致。
- 取 $k = 2$：$\alpha = \arctan\frac{1}{2} \approx 0.4636$，$\mathrm{A} \approx 1.4132$，$\mathrm{B} \approx 5.0309$，$T = \frac{9}{4}\pi \approx 7.0686$，所以 $R/T \approx 0.912$。直接对 $\frac{1}{2}r^2$ 作数值积分，结果与两条公式都吻合。
- 取 $k = 50$，$R/T \approx 0.99987$，$R/S \approx 0.36061$，接近 $\frac{2\pi}{3\pi+8} \approx 0.36059$。
- 对极限作一个合理性检查：当 k 极大时，C_2 近似一个半径为 k 的半圆（面积 $\frac{1}{2}\pi k^2$），而 C_1 是一个固定的半心脏线放大 k 倍，该半心脏线的面积为 $\frac{3\pi}{4}+2$；两者之比为 $\frac{2\pi}{3\pi+8}$。

常见错误

- 忘记极坐标面积公式中的因子 $\frac{1}{2}$，或把 $1+\sin\theta$ 的平方误写成 $1+\sin^2\theta$。
- 在第 (iv) 部分中，声称 $k^2(1-\cos\alpha)$“因为 $\alpha \to 0$ 所以趋于 0”：它乘了 k^2，事实上它趋于 $\frac{1}{2}$。真正重要的只是它相对于 T 的大小。

STEP 之外

求两个以极坐标形式给出的区域的重叠面积，是初尝大学一年级多变量微积分（multivariable calculus）中面积积分 $\iint r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ 的滋味；在那里，最难的部分总是描述区域本身，正如本题一样。第 (iv) 部分的极限论证（为某一项找上界，而不是精确计算它）正是实分析（real analysis）的风格；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是观摩这种风格如何被细致发展的好地方。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。