详细解答

STEP III 2023，第 11 题

概率与统计 · 条件期望值

STEP III 2023，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

只要把 $k+1=k+1$ 写开，并把 k 与 $k!$ 约去，开首的级数（series）便分拆成两个熟悉的指数级数（exponential series）。在第 (i) 部分，D 的分布（distribution）涉及一个求和，遍及所有可能产生 $D=d$ 的 Y 值；交换二重和（double sum）的求和次序后，内层的和就变成简单的 $1+2+\cdots+k$，而随之出现的因子 $\frac{1}{2}(k+1)$ 正好可以用开首的级数处理。第 (ii) 部分则只需以骰子的结果作条件（conditioning）。

解答

级数

当 $k \geq 1$ 时，$\dfrac{k}{k!}=\dfrac{1}{(k-1)!}$，因此把分子拆开，得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{k!}x^k &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\\ &= x\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-1\right)\\ &= xe^x+e^x-1=(x+1)e^x-1,\end{aligned}$$

其中第一个和用了 $j=k-1$。两个级数对每个实数 x 都收敛（converge），所以这样拆开是合理的。这就是所求的恒等式。

第 (i)(a) 部分

$D = 0$ 当且仅当 $Y = 0$（若 $Y = k \geq 1$，骰子显示的数至少是 1），所以

$$\mathrm{P}(D = 0) = \mathrm{P}(Y = 0) = \mathrm{e}^{-n}.$$

第 (i)(b) 部分

固定 $d \geq 1$。骰子只有在至少有 d 面时才可能显示 d，即只有当 $Y = k$ 且 $k \geq d$ 时才可能；而在 $Y = k \geq d$ 的条件下，公正的骰子显示 d 的概率是 $\frac{1}{k}$。根据全概率定律（law of total probability），

$$\mathrm{P}(D = d) = \sum_{k=d}^{\infty} \mathrm{P}(D = d \mid Y = k)\,\mathrm{P}(Y = k) = \sum_{k=d}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}.$$

按定义，$\mathrm{E}(D) = \sum_{d=0}^{\infty} d\,\mathrm{P}(D = d)$，而 $d = 0$ 的项为零，所以

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{d=1}^{\infty} \left[d \sum_{k=d}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \right) \right],$$

正如所求。

> **想一想** 一个外层对 d 求和、内层对 $k \geq d$ 求和的式子，怎样才能变成外层对 k 求和?

这个二重和遍及所有满足 $1 \leq d \leq k$ 的整数对 (d, k)。每一项 $\frac{d}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n}$ 都是非负的，所以我们可以按任何次序把各项相加，总和不变。改为按 k 而不是按 d 分组：对每个 $k \geq 1$，d 由 1 取到 k。因此

$$\mathrm{E}(D) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \sum_{d=1}^{k} d \right),$$

这就是所求的第二个形式。

第 (i)(c) 部分

利用 $\sum_{d=1}^{k} d = \frac{1}{2}k(k+1)$，因子 $\frac{1}{k}$ 被约去：

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(D) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{n^k}{k!}\mathrm{e}^{-n} \cdot \frac{k(k+1)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k!} n^k \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2}\left((n+1)\mathrm{e}^{n} - 1 \right) = \tfrac{1}{2}\left(n + 1 - \mathrm{e}^{-n} \right), \end{aligned}$$

这里用了开首的恒等式，并取 $x = n$。这就是所求的结果。

第 (ii)(a) 部分

设 K 为 n 面骰子显示的数，则对 $k = 1, \ldots, n$ 有 $\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n}$；而在 $K = k$ 的条件下，$Z = X_k$，它服从均值为 k 的泊松分布（Poisson distribution）。所以 $\mathrm{P}(Z = 0 \mid K = k) = \mathrm{e}^{-k}$，再根据全概率定律，

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k}.$$

这是首项为 e^{-1}、公比为 e^{-1} 的几何级数（geometric series）：

$$\mathrm{P}(Z = 0) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\mathrm{e}^{-1}\left(1 - \mathrm{e}^{-n}\right)}{1 - \mathrm{e}^{-1}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-n}}{n(\mathrm{e} - 1)},$$

最后一步是把分子和分母同乘以 e。

第 (ii)(b) 部分

再次以骰子的结果作条件，$\mathrm{E}(Z \mid K = k) = \mathrm{E}(X_k) = k$，所以

$$\mathrm{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(Z \mid K = k)\,\mathrm{P}(K = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

与第 (i)(c) 部分比较，

$$\mathrm{E}(Z) - \mathrm{E}(D) = \frac{n+1}{2} - \frac{n+1-\mathrm{e}^{-n}}{2} = \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-n} > 0,$$

所以 $\mathrm{E}(Z) > \mathrm{E}(D)$，正如所求。

有趣的是，如果没有零的情况，两者便会相等：一颗面数 Y 服从泊松分布的公正骰子，平均显示 $\frac{1}{2}(Y+1)$，而它的均值是 $\frac{1}{2}(n+1)$。唯一的损失在于 $Y = 0$ 时得到 $D = 0$，而不是公式 $\frac{1}{2}(Y+1)$ 所给出的 $\frac{1}{2}$；这情况发生的概率是 e^{-n}，恰好令期望值（expectation）少了 $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-n}$。

验算

- 取 $x = 0$，开首的恒等式变成 $0 = 1 \cdot 1 - 1$；取 $x = 1$，则得 $\sum_{k \geq 1} \frac{k+1}{k!} = 2\mathrm{e} - 1 \approx 4.4366$，部分和亦证实了这一点。
- 当 $n = 3$ 时：$\mathrm{E}(D) = \frac{1}{2}(4 - \mathrm{e}^{-3}) \approx 1.9751$，$\mathrm{E}(Z) = 2$，以及 $\mathrm{P}(Z = 0) \approx 0.1843$。以电脑把每个实验各模拟 200 000 次，得到 1.970、2.002 和 0.185。
- 当 $n = 1$ 时，第 (ii) 部分的骰子必定显示 1，所以 $\mathrm{P}(Z = 0) = \mathrm{e}^{-1}$；公式给出 $\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}-1} = \mathrm{e}^{-1}$。

常见错误

- 在 (i)(b) 中把内层的和由 $k = 1$ 而不是由 $k = d$ 开始：k 面骰子不可能显示比 k 大的数。
- 忘记开首恒等式中的 -1，它来自 e^x 中缺少的 $k = 0$ 项；正是它产生了 (i)(c) 中的 e^{-n}。

STEP 之外

两个部分都是塔性质（tower law）$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(Z \mid K)\big)$ 的实例：在第 (i) 部分，它一行便给出 $\mathrm{E}(D) = \mathrm{E}\big(\frac{1}{2}(Y+1)\mathbf{1}_{Y\geq 1}\big)$，而我们亲手完成的交换求和次序，正是这条定律背后所隐藏的步骤。可以自由重排非负项二重级数的次序，是一条定理（其一般形式为 Tonelli 定理），在大学一年级的分析（analysis）课程中会遇到。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）讨论了条件期望（conditional expectation）以及由它建构的复合分布（compound distributions）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。