详细解答

STEP III 2023，第 10 题

力学 · 梁的平衡

STEP III 2023，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

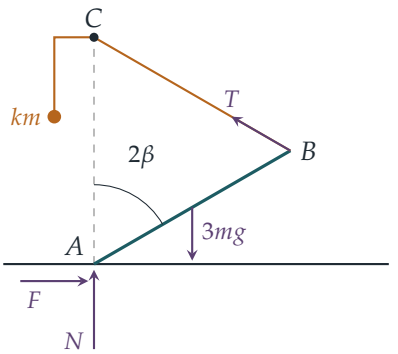
www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

滑轮（pulley）恰好位于 A 正上方一条横梁长度之处，因此 A、B、C 组成一个等腰三角形（isosceles triangle），其中 $AB = AC = 2h$。这个几何关系让我们不费吹灰之力便得到绳子的方向，以及绳子与 A 的垂直距离。之后，一切都按处理平衡（equilibrium）中的杆的惯常步骤进行：对 A 取力矩（moments）（这样便同时消去两个未知的接触力），分解（resolve）各力，再加上条件 $F \leq \mu N$。

解答

我们把横梁视为均匀杆（uniform rod），两个质点（particle）视为点质量，绳子视为轻而不可伸长（light and inextensible），并跨过一个光滑（smooth）滑轮，因此整条绳的张力（tension）相同。由于悬挂的质点处于平衡，张力为 $T = kmg$。



设 A 为原点，x 轴水平（指向 B 所在的一侧），y 轴铅垂向上。于是 $C = (0, 2h)$，而

$B = 2h(\sin 2\beta, \cos 2\beta)$。

绳子的方向。由 B 指向 C 的向量（vector）为

$$2h\big(-\sin 2\beta,\ 1-\cos 2\beta\big) = 4h\sin\beta\,(-\cos\beta,\ \sin\beta),$$

这里用了 $1-\cos 2\beta = 2\sin^2\beta$。因此，作用于横梁的张力有沿 $-x$ 方向（即指回直线 AC）的水平分量 $T\cos\beta$，以及向上的铅垂分量 $T\sin\beta$。从几何角度看：在等腰三角形 ABC 中，两个底角均为 $90^\circ - \beta$，所以 BC 与水平线所成的角为 β。

力臂（*moment arm*）。由 A 到 BC 的垂线平分等腰三角形的顶角 2β，所以其长度为 $2h\cos\beta$。

第 (i) 部分

对 A 取力矩。重量 $3mg$ 作用于 AB 的中点，与 A 的水平距离为 $h\sin 2\beta$。令它与张力的力矩相等：

$$kmg\cdot 2h\cos\beta = 3mg\cdot h\sin 2\beta = 6mgh\sin\beta\cos\beta.$$

由于 $0 < 2\beta < 180^\circ$，故 $\cos\beta \neq 0$，可以两边除以它：

$$\boxed{k = 3\sin\beta.}$$

（这与 $k < 3$ 一致。）

分解各力。铅垂方向：$N + T\sin\beta = 3mg$，所以

$$N = 3mg - 3mg\sin^2\beta = 3mg\cos^2\beta.$$

水平方向：摩擦力（friction）必须抵消绳子的水平拉力，因此它沿 $+x$ 方向作用，且

$$F = T\cos\beta = 3mg\sin\beta\cos\beta.$$

故 $F/N = \tan\beta$。

摩擦条件。平衡要求 $F \le \mu N$，即 $\tan\beta \le \mu$。而

$$k^2 = 9\sin^2\beta = \frac{9\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}.$$

函数（function）$t \mapsto \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ 在 $t \ge 0$ 时递增，且 $0 \le \tan^2\beta \le \mu^2$，所以

$$k^2 \le \frac{9\mu^2}{\mu^2+1},$$

此即所求。

第 (ii) 部分

现在 $T = 2mg$，而附加的质量为 m 的质点与 A 的水平距离为 $xh\sin 2\beta$。绳子的几何关系不变。

对 A 取力矩：

$$2mg \cdot 2h\cos\beta = 3mg\,h\sin 2\beta + mg\,xh\sin 2\beta = 2mgh(3+x)\sin\beta\cos\beta,$$

两边除以 $2mgh\cos\beta \neq 0$，得

$$\sin\beta = \frac{2}{3+x}.$$

当 $0 \le x \le 2$ 时，此值介乎 $\frac{2}{5}$ 与 $\frac{2}{3}$ 之间，所以这样的 β 存在。

分解各力：

$$N = 4mg - 2mg\sin\beta, \qquad F = 2mg\cos\beta,$$

所以

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{4\cos^2\beta}{(4-2\sin\beta)^2} = \frac{\cos^2\beta}{(2-\sin\beta)^2}.$$

代入 $\sin\beta = 2/(3+x)$：

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{4}{(3+x)^2} = \frac{(3+x-2)(3+x+2)}{(3+x)^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{(3+x)^2},$$

$$2-\sin\beta = \frac{2(3+x)-2}{3+x} = \frac{2(x+2)}{3+x}.$$

$(3+x)^2$ 的因子互相消去，剩下

$$\frac{F^2}{N^2} = \frac{(x+1)(x+5)}{4(x+2)^2} = \frac{x^2+6x+5}{4(x+2)^2},$$

此即所求结果。

想一想 怎样把“无论 x 取何值”转化为关于 μ 的条件?

对每个 x，我们都需要 $F \le \mu N$，即 $\mu \ge F/N$。要涵盖所有 $x \in [0,2]$，μ 必须至少等于 F/N 在该区间上的最大值。因此我们要求 F^2/N^2 的最大值。

按照提示,

$$\frac{1}{3} - \frac{F^2}{N^2} = \frac{4(x+2)^2 - 3(x^2+6x+5)}{12(x+2)^2} = \frac{x^2-2x+1}{12(x+2)^2} = \frac{(x-1)^2}{12(x+2)^2} \ge 0,$$

等号当且仅当 $x = 1$ 时成立,而这个值在容许范围之内。所以对所有 $x \in [0,2], F^2/N^2 \le \frac{1}{3}$，且此界在 $x = 1$ 时达到。因此 F/N 的最大值为 $1/\sqrt{3}$，而横梁对每个 x 都能保持平衡，当且仅当 $\mu \ge 1/\sqrt{3}$。所求的最小值为

$$\boxed{\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}}.$$

验算

- 在第 (i) 部分，试考虑横梁水平放置的情况，即 $2\beta = 90°$。此时 $B = (2h, 0)$，绳子 BC 与水平成 $45°$，它与 A 的距离为 $\sqrt{2}\,h$。取力矩得 $T\sqrt{2}\,h = 3mgh$，所以 $T = 3mg/\sqrt{2}$，与 $k = 3\sin 45°$ 吻合。此外 $N = F = \frac{3}{2}mg$，所以 $F/N = 1 = \tan 45°$。
- 在第 (ii) 部分取 $x = 0$，公式给出 $5/16$；直接计算则有 $\sin\beta = \frac{2}{3}$、$\cos^2\beta = \frac{5}{9}$、$(2 - \frac{2}{3})^2 = \frac{16}{9}$，同样得到 $\frac{5}{16}$。
- 取 $x = 1$：$\sin\beta = \frac{1}{2}$，所以 $\beta = 30°$，横梁与铅垂线成 $60°$；$F/N = \cos 30°/(2 - \frac{1}{2}) = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$。以电脑对 x 在 $[0, 2]$ 范围内的力矩及分解后的力进行验算，确认了公式及这个最大值。

常见错误

- 忘记绳子是沿 BC 拉，而不是铅垂地拉：滑轮在 C，所以张力有水平分量，而摩擦力要抵抗的正是这个分量。
- 取了 F/N 的最小值（或其在端点的值），而不是它在 $0 \le x \le 2$ 上的最大值。最坏情况出现在区间内部，即 $x = 1$ 处。
- 混淆力臂：重量的力臂是水平距离（$h\sin 2\beta$），而张力的力臂是到 BC 的垂直距离（$2h\cos\beta$）。

STEP 之外

取力矩与分解各力，正是刚体（rigid body）平衡条件的两半：合力为零，以及合力矩（torque）为零。到了大学，这些条件会写成向量形式 $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 及 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$；而第 (ii) 部分那种“对参数取最坏情况”的推理，正好让你初尝工程师如何为安全余量作设计。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以这种向量语言，细致地发展了静力学（statics）与力矩的理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。