详细解答

STEP III 2023，第 1 题

纯数学 · 圆锥曲线的切线

STEP III 2023，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

一条直线与圆相切（tangent），当且仅当圆心到该直线的垂直距离等于半径。因此，我们先用 p 和 q 写出弦（chord）PQ 的方程，计算这个距离，然后看着相切条件化简成题目所给的关系式。之后，一切都归结为一条含两个参数的对称方程：最后一部分问的是，这个关系式对第三条边是否仍然成立，而这正是根之和与根之积（sums and products of roots）的用武之地。

解答

第 (i) 部分

PQ 的斜率（gradient）是

$$\frac{aq^2-ap^2}{2aq-2ap}=\frac{p+q}{2},$$

由于两点相异，可以除以 $q-p\neq 0$。因此经过 P 的直线是 $y-ap^2=\frac{1}{2}(p+q)(x-2ap)$，化简后得

$$(p+q)x-2y-2apq=0.$$

圆心 $C(0,3a)$ 到这条直线的距离是

$$\frac{|-6a-2apq|}{\sqrt{(p+q)^2+4}}=\frac{2a|pq+3|}{\sqrt{(p+q)^2+4}}.$$

这条直线与圆相切，当且仅当此距离等于 $2a$，即（由于两边皆为正，可以平方，再约去 $4a^2\neq 0$）当且仅当

$$(pq+3)^2=(p+q)^2+4 \iff p^2q^2+6pq+5=(p+q)^2.$$

这正是 $(*)$，所以当 $(*)$ 成立时，直线 PQ 是圆的切线。（每一步都是可逆的，所以逆命题（converse）亦成立，而我们在第 (iii) 部分会用到这一点。）

第 (ii) 部分

展开 $(*)$ 并按 q 的幂次整理：

$$(1-p^2)q^2 - 4pq + (p^2-5) = 0.$$

由于 $p^2 \neq 1$，首项系数不为零，所以这确实是一条关于 q 的二次方程。它的判别式（discriminant）是

$$\begin{aligned} 16p^2 - 4(1-p^2)(p^2-5) &= 16p^2 - 4(-p^4+6p^2-5) \\ &= 4(p^4-2p^2+5) \\ &= 4((p^2-1)^2+4) > 0, \end{aligned}$$

所以有两个相异实根 q_1, q_2。两者都不等于 p：把 $q=p$ 代入左边得 $-p^4-2p^2-5<0$。所以 Q_1 和 Q_2 确实是与 P 相异的点。

由这条二次方程，

$$q_1+q_2 = \frac{4p}{1-p^2}, \qquad q_1q_2 = \frac{p^2-5}{1-p^2}.$$

第 (iii) 部分

取三角形 PQ_1Q_2，其中 $Q_i = (2aq_i, aq_i^2)$，而 q_1, q_2 是第 (ii) 部分中的两个根。它的顶点全都在 $x^2 = 4ay$ 上，而且是三个相异点（如 (ii) 所证）；抛物线（parabola）上三个相异点必定不共线，因为一条直线与抛物线最多相交两次。所以这确实是一个三角形。

由第 (i) 部分，由于 (p, q_1) 和 (p, q_2) 满足 $(*)$，边 PQ_1 和 PQ_2 都与圆相切。

> ? **想一想** 如果我们不想明确解出 q_1 和 q_2，怎样才能证明第三条边 Q_1Q_2 也是切线?

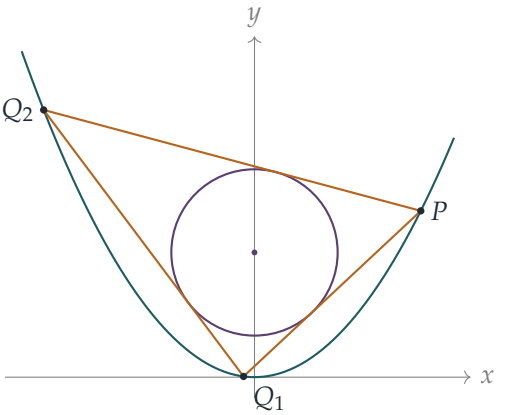
根据第 (i) 部分的可逆论证（把 p, q 换成 q_1, q_2），Q_1Q_2 是切线当且仅当

$$(q_1+q_2)^2 = q_1^2q_2^2 + 6q_1q_2 + 5,$$

而两边都只涉及 $s = q_1+q_2$ 和 $t = q_1q_2$，这两者我们已经知道。全式乘以 $(1-p^2)^2$。左边变成 $16p^2$。右边变成

$$\begin{aligned} &(p^2-5)^2 + 6(p^2-5)(1-p^2) + 5(1-p^2)^2 \\ &\quad = (p^4-10p^2+25) + (-6p^4+36p^2-30) + (5p^4-10p^2+5) \\ &\quad = 16p^2. \end{aligned}$$

两边相等，所以 Q_1Q_2 也与圆相切，而 PQ_1Q_2 就是所求的三角形。



图中显示 $a=1$、$p=2$ 的情况，此时 $q_{1,2}=\frac{1}{3}(-4\pm\sqrt{13})$。

验算

- 取 $a=1$、$p=2$：二次方程是 $3q^2+8q+1=0$，其中 $q_1+q_2=-\frac{8}{3}=\frac{4p}{1-p^2}$，$q_1q_2=\frac{1}{3}=\frac{p^2-5}{1-p^2}$。于是 $(q_1+q_2)^2=\frac{64}{9}$，而 $q_1^2q_2^2+6q_1q_2+5=\frac{1}{9}+2+5=\frac{64}{9}$，正如第 (iii) 部分所要求。
- 数值上，取 $q_1\approx-0.1315$、$q_2\approx-2.5352$，三条边所在直线到 $(0,3)$ 的距离都是 2.000；用电脑对数以千计的随机 a 和 p 作检验，结果吻合至约 10^{-13}。
- 被排除的情况 $p=\pm1$ 很有启发性：当 $p=1$ 时，二次方程退化为 $-4q-4=0$，只得出 $q=-1$。从 $P(2a,a)$ 出发那条“失踪”的切线是铅垂线 $x=2a$，它与圆相切，但与抛物线只相交于 P。

常见错误

- 在距离公式中忘记绝对值，或者平方时没有指出两边皆为正。
- 只用了第 (i) 部分的“若”方向：第 (iii) 部分需要逆命题，才能把 Q_1Q_2 的相切转化为代数条件，所以要说明各步是可逆的。
- 没有检查 $q_1,q_2\neq p$，以确保三角形不是退化的。

STEP 之外

这是庞斯莱闭合定理（Poncelet's porism）的一个例子：如果一个三角形可以内接于一条圆锥曲线（conic），同时外切于另一条圆锥曲线，那么这样的三角形可以从第一条圆锥曲线上的任何一点出发作出。这里的抛物线与圆正是这样的一对，而第 (iii) 部分用韦达定理（Vieta's formulas）直接证明了闭合性。一般情况的证明要用到射影几何（projective geometry），而最优雅的证明则用到椭圆曲线（elliptic curves）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学高阶难题》）收录了更多这类参数化圆锥曲线几何的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。