详细解答

STEP II 2023，第 9 题

力学 · 斜坡上的连接质点

STEP II 2023，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

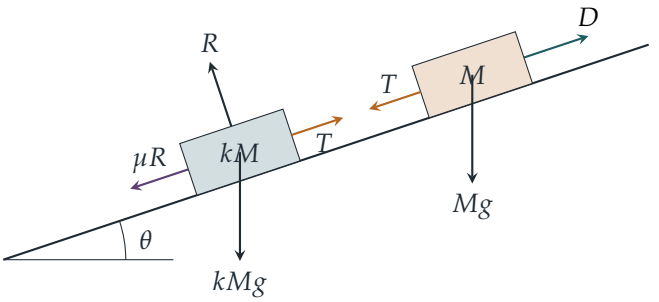
关键思路

在三种情况下，分别对货车和拖车写出牛顿（Newton）第二定律（Newton's second law）。下坡其实就是上一条倾角为 $-\alpha$ 的斜坡，所以一组方程就能涵盖全部三种情况。单凭货车的方程，几乎就能直接得出 (i) 的关系式。至于 (ii)，整道题归结为比较 $1-\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha$ 的大小。

解答

我们把货车和拖车视为质点（particle），两者之间以一根沿运动方向放置的轻刚性杆连接。两者都沿货车的方向运动，所以拖车所受的摩擦力（friction）与运动方向相反，大小为 μR，其中 R 是拖车所受的法向反作用力（normal reaction）。张力（tension）T 把拖车向前拉，把货车向后拉。（若 T 算出来是负数，就表示杆处于推力（thrust）状态；代数运算不变。）

把斜坡的倾角记为 θ，规定 $\theta=\alpha$ 为上坡，$\theta=0$ 为平地，$\theta=-\alpha$ 为下坡。



设沿斜坡向上的加速度（acceleration）为 a。对每个物体沿斜坡方向分解力，并对拖车在垂直于斜坡的方向分解力（得 $R = kMg\cos\theta$），便有

$$\text{货车：} \qquad D - T - Mg\sin\theta = Ma, \tag{1}$$

$$\text{拖车：} \qquad T - kMg\sin\theta - \mu kMg\cos\theta = kMa. \tag{2}$$

把 (1) 与 (2) 相加，消去 T：

$$a = \frac{D}{(1+k)M} - g\sin\theta - \frac{\mu kg\cos\theta}{1+k}.$$

代入 (1)，得 $T = D - Mg\sin\theta - Ma$，所以

$$T = D - \frac{D}{1+k} + \frac{\mu kMg\cos\theta}{1+k} = \frac{kD + \mu kMg\cos\theta}{1+k}.$$

含 $\sin\theta$ 的项互相抵消，因此张力只通过 $\cos\theta$ 与 θ 有关。

第 (i) 部分

由于 $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$，$\theta = \alpha$ 与 $\theta = -\alpha$ 两种情况的张力相同：

$$T_1 = T_3 = \frac{kD + \mu kMg\cos\alpha}{1+k}, \qquad T_2 = \frac{kD + \mu kMg}{1+k}.$$

要证明第二个结果，只需用到三种情况下的货车方程 (1)：

$$\begin{aligned} Ma_1 &= D - T_1 - Mg\sin\alpha, \\ Ma_2 &= D - T_2, \\ Ma_3 &= D - T_3 + Mg\sin\alpha. \end{aligned}$$

把第一和第三条方程相加，并利用 $T_3 = T_1$，得 $M(a_1 + a_3) = 2D - 2T_1$。再减去中间方程的两倍，

$$M(a_1 + a_3 - 2a_2) = (2D - 2T_1) - (2D - 2T_2) = 2(T_2 - T_1),$$

即为所求。

第 (ii)(a) 部分

第一个不等式。由 (i) 可知，$a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$ 等价于 $T_2 > T_1$（因为 $M > 0$）。由上面的公式，

$$T_2 - T_1 = \frac{\mu kMg\,(1 - \cos\alpha)}{1+k} > 0,$$

这是因为 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 给出 $\cos\alpha < 1$，而由于有摩擦力作用，$\mu > 0$。所以 $a_2 < \frac{1}{2}(a_1 + a_3)$。

第二个不等式。$\frac{1}{2}(a_1+a_3) < a_3$ 等价于 $a_1 < a_3$。从 a 的公式可见，对于 $\theta = \pm\alpha$，含 D 的项和摩擦力项都相同，所以

$$a_3 - a_1 = 2g\sin\alpha > 0.$$

（另一做法是把两条货车方程相减，并利用 $T_1 = T_3$，得 $M(a_3 - a_1) = 2Mg\sin\alpha$。）因此

$$a_2 < \tfrac{1}{2}(a_1+a_3) < a_3.$$

第 (ii)(b) 部分

在 a 的公式中分别取 $\theta = 0$ 和 $\theta = \alpha$，

$$a_2 - a_1 = g\sin\alpha - \frac{\mu k g\,(1-\cos\alpha)}{1+k} = g\left[\sin\alpha - \frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha)\right].$$

想一想 上坡会损失 $g\sin\alpha$ 的加速度，但法向反作用力减小，又会省下一些摩擦力。哪一个效应较大?

省下的摩擦力是较小的一方。首先，$\dfrac{k}{1+k} < 1$ 且 $\mu < 1$，所以 $0 \le \dfrac{\mu k}{1+k} < 1$。其次，利用半角公式（half-angle formulae），

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha,$$

所以 $\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\tfrac{1}{2}\alpha < 1$，因为 $0 < \tfrac{1}{2}\alpha < \tfrac{1}{4}\pi$。因此

$$\frac{\mu k}{1+k}(1-\cos\alpha) < 1-\cos\alpha < \sin\alpha,$$

其中第一个不等号是严格的，因为 $1-\cos\alpha > 0$。所以 $a_2 - a_1 > 0$，即 $a_1 < a_2$。条件 $\mu < 1$ 正是在这里用上的。若拖车非常重、μ 很大而斜坡又很陡，省下的摩擦力就可能超过 $g\sin\alpha$。

验算

- 取 $M = 1000\,\text{kg}$、$k = 0.5$、$\mu = 0.4$、$\alpha = 30°$、$D = 5000\,\text{N}$ 及 $g = 9.8\,\text{m s}^{-2}$。那么 $a_1 \approx -2.698$、$a_2 \approx 2.027$、$a_3 \approx 7.102\,\text{m s}^{-2}$，而 $T_1 = T_3 \approx 2798\,\text{N}$、$T_2 \approx 2973\,\text{N}$。可见 $\frac{1}{2}(a_1+a_3) \approx 2.202$ 确实严格介乎 a_2 与 a_3 之间，而且 $a_1 < a_2$。用电脑对大量 $\mu < 1$ 的随机参数组合进行检验，所有恒等式和不等式均成立。
- 若 $\mu = 0$，则在任何斜坡上张力都是 $kD/(1+k)$，而 a_2 恰好是 a_1 与 a_3 的平均值。这就是 (ii)(a) 需要有摩擦力的原因。
- 取 $\mu = 3$、$k = 100$ 及 $\alpha = 1.5$ 弧度，则 $a_1 > a_2$，所以 (b) 中的条件 $\mu < 1$ 确实不可缺少。

常见错误

- 在斜坡上把摩擦力写成 μkMg。斜坡上的法向反作用力是 $kMg\cos\alpha$，而第 (ii) 部分的全部内容正是建基于这个差别。
- 下坡时把重力分量的正负号弄错。把一切用 θ 表示，再令 $\theta = -\alpha$，就可避免这个错误。
- 在 (ii)(b) 中只论证 $\mu k/(1+k) < 1$，却没有比较 $1-\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha$。两个事实缺一不可。

STEP 之外

把一个系统拆分成若干物体，对每个物体应用牛顿定律，而内力则以大小相等、方向相反的形式成对出现——这是刚体（rigid body）力学和多质点力学的基本方法。把各方程相加，便得到质心（centre of mass）的运动，而内力则会消去。不等式 $1-\cos\alpha < \sin\alpha$ 也是一个利用半角恒等式比较函数（function）大小的小例子，这种技巧在整个分析学（analysis）中都很有用。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这些概念有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。