详细解答

STEP II 2023，第 8 题

纯数学 · 三维向量

STEP II 2023，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

先为三对对棱命名，第 (i) 部分就化为三条线性方程。之后的一切，都来自把每个长度条件转化为点积（dot product），所用的是 $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\,\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$。一旦三个点积 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$、$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ 都以 $|\mathbf{a}|^2$、$|\mathbf{b}|^2$ 和 $|\mathbf{c}|^2$ 表示出来，第 (iii) 和 (iv) 部分就只是展开括号而已。

解答

第 (i) 部分

将四面体（tetrahedron）记为 $OABC$。它的六条棱（edge）组成三对没有公共顶点的棱：

$$OA \text{ 和} BC, \qquad OB \text{ 和} CA, \qquad OC \text{ 和} AB.$$

设 $OA = p$、$BC = p'$、$OB = q$、$CA = q'$、$OC = r$、$AB = r'$。四个面的周界（perimeter）分别为

$$OAB : p + q + r', \qquad OAC : p + r + q',$$
$$OBC : q + r + p', \qquad ABC : p' + q' + r'.$$

若四面体是等腰四面体（*isosceles tetrahedron*），则 $p = p'$、$q = q'$、$r = r'$，而四个周界都等于 $p + q + r$。

反过来，假设四个周界全部相等。设 $X = p - p'$、$Y = q - q'$、$Z = r - r'$。把前三个面

分别与 ABC 比较：

$$(p+q+r')-(p'+q'+r')=X+Y=0,$$
$$(p+r+q')-(p'+q'+r')=X+Z=0,$$
$$(q+r+p')-(p'+q'+r')=Y+Z=0.$$

三式相加得 $2(X+Y+Z)=0$。再以 $X+Y+Z=0$ 依次减去每一条方程，得 $Z=0$、$Y=0$ 及 $X=0$。所以 $p=p'$、$q=q'$ 及 $r=r'$：四面体是等腰的。这就证明了两个方向。

第 (ii) 部分

由于 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$，条件 $OA=BC$ 即是

$$|\mathbf{a}|^2=|\mathbf{c}-\mathbf{b}|^2=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c},$$

移项后得 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2$，正是所求。

对另外两对对棱（$OB=CA$ 及 $OC=AB$）作同样的论证，得

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{b}|^2,\qquad 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{c}|^2.$$

把这两式相加，$|\mathbf{b}|^2$ 和 $|\mathbf{c}|^2$ 项互相抵消：

$$2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=2|\mathbf{a}|^2,\quad\text{所以}\quad\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2.$$

这三条点积公式对 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是对称的，因此同理可得

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=|\mathbf{b}|^2,\qquad\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=|\mathbf{c}|^2.$$

第 (iii) 部分

设 $S=|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2$。把第 (ii) 部分中 $2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$、$2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}$ 和 $2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 的三条公式相加，每个长度的平方都以正号出现两次、以负号出现一次，所以

$$2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=S.$$

与 O 的距离。

$$OG^2=\tfrac{1}{16}|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2=\tfrac{1}{16}(S+2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}))=\tfrac{1}{16}(2S)=\tfrac{1}{8}S.$$

*与 A 的距离。*这里 $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}(\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a})$，而

$$\begin{aligned}|\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\mathbf{a}|^2&=|\mathbf{b}+\mathbf{c}|^2-6\,\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})+9|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-6|\mathbf{a}|^2+9|\mathbf{a}|^2\qquad\text{利用}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=|\mathbf{a}|^2\\&=|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2+(|\mathbf{b}|^2+|\mathbf{c}|^2-|\mathbf{a}|^2)+3|\mathbf{a}|^2\\&=2S.\end{aligned}$$

所以同样有 $AG^2 = \frac{1}{16}(2S) = \frac{1}{8}S$。

*与 B 和 C 的距离。*我们用过的每一个关于 $\mathbf{a}$ 的事实，对 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 同样成立（见第 (ii) 部分末段），而 S 是对称的。因此完全相同的计算给出 $BG^2 = CG^2 = \frac{1}{8}S$。

故此 G 与四个顶点的距离都是 $\sqrt{S/8}$。

第 (iv) 部分

展开题目提示的向量：

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 &= S - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ &= S - 2|\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} && \text{由第 (ii) 部分}\\ &= (|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - |\mathbf{a}|^2) + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 4\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

所以

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}|^2 \geq 0,$$

因此角 BOC 不是钝角（obtuse angle）。

> **想一想** 这只是十二个角之中的一个。怎样才能不必重复计算，就得到其余所有的角？

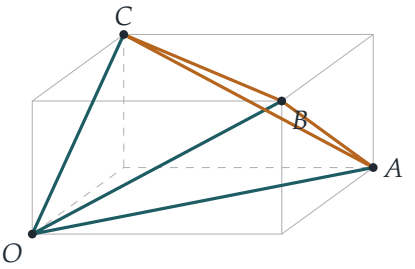
以 $\mathbf{b}-\mathbf{c}-\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c}-\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 作同样的计算，得 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} \geq 0$ 及 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \geq 0$，所以 O 处没有钝角。“等腰”是四面体本身的性质，与我们怎样标记顶点无关，所以任何一个顶点都可以叫作 O。因此同一论证在 A、B 和 C 处同样适用。（另一做法：每个面的三边都是 p、q、r，所以四个面是全等（congruent）三角形，而它们的角正好就是 O 处的三个角 BOC、COA、AOB。）故此在任何一个顶点处相交的两条棱之间的角都不是钝角。

*会不会是直角？*等号 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 0$ 只在 $|\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}| = 0$ 时成立，即 $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{c}$。但这样 A 便位于经过 O、B、C 的平面上（事实上 $OBAC$ 是长方形），$OABC$ 是平的，并不是四面体。每个角的情况都一样，所以**没有任何角可以是直角**：在真正的等腰四面体中，每个面角都是锐角（acute angle）。

验算

- 一个具体例子：取边长为 x, y, z 的长方体（cuboid），选出它的四个顶点，使其中任何两个都不由长方体的棱相连，例如 $O = (0,0,0)$、$A = (x,y,0)$、$B = (x,0,z)$、$C = (0,y,z)$。对棱是相对两个面的对角线，所以彼此相等。取 $x = 1$、$y = 2$、$z = 3$，得 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 9$ 及 $\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c} = (0,0,-6)$，而确实 $\frac{1}{4}\cdot 36 = 9$。此外 $G = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ 是长方体的中心，与每个顶点的距离都是 $\sqrt{14}/2$，与 $\sqrt{S/8}$（其中 $S = 5+10+13 = 28$）吻合。

- 平面的情况：$\mathbf{b} = (3,0,0)$、$\mathbf{c} = (0,4,0)$、$\mathbf{a} = (3,4,0)$ 给出一个长方形，它的对“棱”（边和对角线）相等，而且有直角。这正是我们排除了的退化情况。
- 这些恒等式亦已用电脑在数千个随机的长方体例子上验证过。



常见错误

- 在第 (i) 部分只证明了一个方向。“当且仅当”（if and only if）需要两个方向，而有实质内容的是逆命题那一部分。
- 在第 (iv) 部分没有妥善排除直角。$\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ 迫使 $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$，令四点共面（coplanar）。
- 只检查了 O 处的角便停下来。要说明为甚么其余三个顶点也有同样结论。

STEP 之外

上面的长方体图已道出全部真相：每个等腰四面体（又称双楔体（disphenoid））都可以从长方体选取相间的顶点得到。这样，第 (iii) 部分是说形心（centroid）就是长方体的中心，而第 (iv) 部分是说长方体的边长是正数。把长度条件转化为点积，进而转化为由内积（inner product）组成的格拉姆矩阵（Gram matrix），是大学一年级线性代数（linear algebra）和几何的标准工具。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）是了解这套方法如何发展的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。