详细解答

STEP II 2023，第 7 题

纯数学 · 两个平方数之和

STEP II 2023，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 1.6 节两个平方数之和中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/two-squares.html

关键思路

两个平方数之和（sum of two squares）x^2+y^2 正是 $|x+y\mathrm{i}|^2$。这样一来，第 (i) 部分说的就是：两个“两平方数之和”的乘积仍然是两个平方数之和，而把对应的复数（complex number）相乘，就能知道是哪两个平方数。之后每一部分的做法都一样：把每个因数写成两个平方数之和（通常是找出一个相近的完全平方数），然后相乘。最后一部分则反其道而行，以除法代替乘法。

解答

第 (i) 部分

我们有 $zw=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$，所以

$$\begin{aligned}|zw|^2&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=a^2c^2-2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=|z|^2|w|^2.\end{aligned}$$

由于 $|zw|$ 和 $|z||w|$ 都是非负数，取平方根便得 $|zw|=|z||w|$，证毕。

以下我们会使用平方形式：若 z 和 w 的实部和虚部都是整数，则

$$|z|^2\,|w|^2 = |zw|^2 = (\operatorname{Re} zw)^2 + (\operatorname{Im} zw)^2.$$

第 (ii) 部分

这里 $|2+\mathrm{i}|^2 = 4+1 = 5$，而 $|10+11\mathrm{i}|^2 = 100+121 = 221$。两者的乘积是

$$(2+\mathrm{i})(10+11\mathrm{i}) = 20+22\mathrm{i}+10\mathrm{i}-11 = 9+32\mathrm{i},$$

所以由第 (i) 部分，$9^2+32^2 = 5\times 221$。（的确，$81+1024 = 1105$。）因此 $h=9$、$k=32$ 符合要求。

若改用 $10-11\mathrm{i}$（它的模（modulus）相同），则得 $(2+\mathrm{i})(10-11\mathrm{i}) = 31-12\mathrm{i}$，所以 $h=31$、$k=12$ 也符合要求。

第 (iii) 部分

这个数的末位是 5，所以 $8045 = 5\times 1609$，而如前所述 $5 = |2+\mathrm{i}|^2$。现在需要把 1609 写成两个平方数之和。它略大于 $40^2 = 1600$，而 $1609-1600 = 9 = 3^2$，所以 $1609 = |40+3\mathrm{i}|^2$。于是

$$(2+\mathrm{i})(40+3\mathrm{i}) = 80+6\mathrm{i}+40\mathrm{i}-3 = 77+46\mathrm{i},$$

由第 (i) 部分得

$$77^2+46^2 = 5\times 1609 = 8045.$$

所以 $m=77$、$n=46$。（若改用 $3+40\mathrm{i}$，则得 $-34+83\mathrm{i}$，所以 $34^2+83^2 = 8045$ 亦成立。）

第 (iv) 部分

这里多出的因数是 $36 = 6^2 = |6|^2$，即实数 6 的模的平方。把 $102+201\mathrm{i}$ 乘以 6，只是把实部和虚部同时放大：

$$(6\times 102)^2+(6\times 201)^2 = 36\,(102^2+201^2) = 36\times 50805.$$

所以 $p=612$、$q=1206$。

第 (v) 部分

思路是找出两种不同的方法，用高斯整数把 25 写成 $|\alpha|^2$，再把每一个都乘以 1002082 的同一个固定表示式。

首先，1002082 略大于 $1001^2 = 1002001$，而

$$1002082-1002001 = 81 = 9^2,$$

所以 $1002082 = 1001^2 + 9^2 = |1001 + 9\mathrm{i}|^2$。

其次，$25 = |5|^2 = |3 + 4\mathrm{i}|^2 = |3 - 4\mathrm{i}|^2$。把它们各自乘以 $1001 + 9\mathrm{i}$，每个都给出一对数：

$$\begin{aligned} 5(1001 + 9\mathrm{i}) &= 5005 + 45\mathrm{i}, \\ (3 + 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} + 4004\mathrm{i} - 36 = 2967 + 4031\mathrm{i}, \\ (3 - 4\mathrm{i})(1001 + 9\mathrm{i}) &= 3003 + 27\mathrm{i} - 4004\mathrm{i} + 36 = 3039 - 3977\mathrm{i}. \end{aligned}$$

由第 (i) 部分，每一个的模的平方都是 25×1002082。把实部和虚部取绝对值，并把较小的放在前面，便得到三组不同且满足 $r < s$ 的数对：

$$(r, s) = (45, 5005), \qquad (2967, 4031), \qquad (3039, 3977).$$

想一想 为甚么不同时使用 $4 + 3\mathrm{i}$，得出第四组数对？

因为 $4 + 3\mathrm{i} = \mathrm{i}(3 - 4\mathrm{i})$，而乘以 i 只会把实部和虚部互换（不计正负号）。它重现的是 $(3039, 3977)$，只是次序倒转，所以并没有给出新的结果。真正不同的选择是 5、$3 + 4\mathrm{i}$ 和 $3 - 4\mathrm{i}$。

第 (vi) 部分

现在我们把方法倒过来用。同样先找一个相近的平方数：$1002037 - 1002001 = 36 = 6^2$，所以

$$1002037 = 1001^2 + 6^2 = |1001 + 6\mathrm{i}|^2,$$

而且 $109 = 10^2 + 3^2 = |10 + 3\mathrm{i}|^2$。如果我们能把 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(t + u\mathrm{i})$ 中的 t、u 取为整数，那么由第 (i) 部分得

$$1002037 = 109\,(t^2 + u^2),$$

再除以 109（利用 $109 \times 9193 = 1002037$）便得 $t^2 + u^2 = 9193$。

于是我们做除法，分子和分母同乘以共轭（conjugate）$10 - 3\mathrm{i}$：

$$\begin{aligned} \frac{1001 + 6\mathrm{i}}{10 + 3\mathrm{i}} &= \frac{(1001 + 6\mathrm{i})(10 - 3\mathrm{i})}{109} = \frac{10010 - 3003\mathrm{i} + 60\mathrm{i} + 18}{109} \\ &= \frac{10028 - 2943\mathrm{i}}{109} = 92 - 27\mathrm{i}, \end{aligned}$$

因为 $109 \times 92 = 10028$ 及 $109 \times 27 = 2943$。这个除法刚好整除，所以 $1001 + 6\mathrm{i} = (10 + 3\mathrm{i})(92 - 27\mathrm{i})$，因此

$$92^2 + 27^2 = 9193.$$

所以 $t = 92$、$u = 27$。验算一下：$8464 + 729 = 9193$。

想一想 如果除法不能整除，那怎么办？

那就试另一个共轭。改为除以 $10-3\mathrm{i}$，得到 $(9992+3063\mathrm{i})/109$，这并不是高斯整数（9992 不是 109 的倍数）。由于 109 是质数（prime），两个选择之中必有一个可行；这正是下文“STEP 之外”一节提到的高斯整数性质。至于拿 $1001-6\mathrm{i}$ 来除，并不会得到新结果，只会得到上述结果的共轭。

验算

每个答案都可以直接用算术验证：$9^2+32^2=1105=5\times221$；$77^2+46^2=5929+2116=8045$；$612^2+1206^2=1828980=36\times50805$；对于 (v)，$45^2+5005^2$、$2967^2+4031^2$ 和 3039^2+3977^2 都等于 25052050；以及 $92^2+27^2=9193$。用电脑搜索可以证实这些结果，并发现 25×1002082 其实有六个满足 $0<r<s$ 的表示式（另外三个是 $(721,4953)$、$(2079,4553)$ 和 $(2395,4395)$）。它们来自 1002082 本身的另一个表示式，所以任何三组不同的数对都可接受。同样地，$9193=48^2+83^2$ 亦成立。

常见错误

- 在 (v) 中，以为 $(3+4\mathrm{i})$ 和 $(4+3\mathrm{i})$ 会给出不同的数对：其实它们给出的是同一对数，只是次序相反。
- 在 (vi) 中，除以错误的共轭而得到非整数，然后就放弃。应该试试另一个。
- 展开乘积时，在 $\mathrm{i}^2=-1$ 上弄错正负号：最后务必直接验算平方和。

STEP 之外

所有 a,b 为整数的数 $a+b\mathrm{i}$ 组成*高斯整数*（Gaussian integers），这是一个环（ring）；与普通整数一样，在其中分解为质数的方式是唯一的。若普通质数 $p\equiv1\pmod4$，则它可分裂为 $(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})$，这就是费马（Fermat）的二平方和定理（two-squares theorem）。计算把这些因数分配的方法有多少种，便能准确解释一个数有多少个表示式，以及为何 1002082 的表示式不止我们用过的那一个。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）对两个平方数之和有精彩的论述；Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）则把高斯整数作为一个环来讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。