详细解答

STEP II 2023，第 6 题

纯数学 · 斐波那契矩阵恒等式

STEP II 2023，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

只要把斐波那契数（Fibonacci numbers）看成同一个 2×2 矩阵（matrix）各次幂的元素，关于它们的每一条恒等式（identity）就变成关于 $\mathbf{Q}$ 的幂的恒等式，而普通的代数运算（指数律（index laws）、行列式（determinant）、二项式定理（binomial theorem））便能完成所有工作。每一部分都依循同一个方法：找出同一个矩阵的两种写法，然后读出其中一个元素。几乎每次都是右上角的元素，而它正是 F_n 本身。

解答

矩阵公式

当 $n = 1$ 时，左边是 $\begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}$，因为 $F_2 = F_1 + F_0 = 1$。所以结果在 $n = 1$ 时成立。

假设结果对某个 $n \geq 1$ 成立。那么

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \mathbf{Q}^n\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix},$$

这里用了两次递推关系（recurrence）。这正是把公式中的 n 换成 $n+1$ 的结果，所以由归纳法（induction），公式对所有正整数 n 成立。

第 (i) 部分

行列式具有乘法性，所以 $\det(\mathbf{Q}^n) = (\det \mathbf{Q})^n = (0-1)^n = (-1)^n$。从元素直接计算同一个行列式，

$$\det(\mathbf{Q}^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2,$$

因此 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$，得证。（这就是卡西尼恒等式（Cassini's identity）。）

第 (ii) 部分

由指数律，$\mathbf{Q}^{m+n} = \mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$：

$$\begin{pmatrix} F_{m+n+1} & F_{m+n} \\ F_{m+n} & F_{m+n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{m+1} & F_m \\ F_m & F_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}.$$

乘积的右上角元素是 $\mathbf{Q}^m$ 的第一行乘以 $\mathbf{Q}^n$ 的第二列，即 $F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}$。比较右上角元素，得

$$F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_mF_{n-1}.$$

第 (iii) 部分

直接计算，

$$\mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{Q}.$$

（这是 $x^2 = 1 + x$ 的矩阵版本，而这条方程正是黄金比例（golden ratio）所满足的方程。）

在以下各部分中，注意对每个 $k \geq 1$，$\mathbf{Q}^k$ 的右上角元素都是 F_k；对 $k = 0$ 亦然，因为 $\mathbf{Q}^0 = \mathbf{I}$ 的右上角元素是 $0 = F_0$。取矩阵之和的右上角元素是线性（linear）运算，所以 $\sum c_k\mathbf{Q}^k$ 的右上角元素是 $\sum c_kF_k$。

(a) 利用 $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{Q}$ 及取 $\mathbf{A} = \mathbf{Q}$ 的二项式定理，

$$\mathbf{Q}^{2n} = (\mathbf{Q}^2)^n = (\mathbf{I} + \mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\mathbf{Q}^k.$$

左边的右上角元素是 F_{2n}，右边的则是 $\sum_k \binom{n}{k}F_k$。因此 $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}F_k$。

(b) 先用同样的方法求 $\mathbf{Q}^3$：

$$\mathbf{Q}^3 = \mathbf{Q}\,\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}(\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} + \mathbf{I} + \mathbf{Q} = \mathbf{I} + 2\mathbf{Q}.$$

然后应用取 $\mathbf{A} = 2\mathbf{Q}$ 的二项式定理：

$$\mathbf{Q}^{3n} = (\mathbf{I} + 2\mathbf{Q})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}2^k\mathbf{Q}^k,$$

比较右上角元素，得 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k F_k$。

至于第二条恒等式，写成 $\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \mathbf{Q}^{2n}$，并利用 (a) 的展开式：

$$\mathbf{Q}^{3n} = \mathbf{Q}^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k}.$$

$\mathbf{Q}^{n+k}$ 的右上角元素是 F_{n+k}，所以 $F_{3n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{n+k}$。

(c)

? **想一想** 应该把哪个矩阵自乘 n 次，才能产生符号 $(-1)^{n+k}$?

展开 $(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n$ 时，就会出现符号 $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$。为了配合我们可以使用的二项式定理的形式，写成 $\mathbf{Q} - \mathbf{I} = -(\mathbf{I} + (-\mathbf{Q}))$，于是

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = (-1)^n (\mathbf{I} + (-\mathbf{Q}))^n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathbf{Q}^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^k.$$

两边乘以 $\mathbf{Q}^n$，

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \mathbf{Q}^{n+k} = \mathbf{Q}^n (\mathbf{Q} - \mathbf{I})^n = (\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I}))^n,$$

最后一步之所以成立，是因为 $\mathbf{Q}$ 与 $\mathbf{Q} - \mathbf{I}$ 可交换（commute）（两者都是 $\mathbf{Q}$ 的多项式（polynomial）），所以各因子可以重新组合。但由 (iii)，$\mathbf{Q}(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) = \mathbf{Q}^2 - \mathbf{Q} = \mathbf{I}$，所以整个和等于 $\mathbf{I}^n = \mathbf{I}$。

$\mathbf{I}$ 的右上角元素是 0，而左边的右上角元素是 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k}$。因此

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k} = 0.$$

额外收获：比较左上角元素，得 $\sum_k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} F_{n+k+1} = 1$。

验算

- (i)，取 $n = 5$：$F_6 F_4 - F_5^2 = 8 \cdot 3 - 25 = -1 = (-1)^5$。
- (ii)，取 $m = 3$、$n = 4$：$F_4 F_4 + F_3 F_3 = 9 + 4 = 13 = F_7$。
- (a)，取 $n = 4$：$0 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 21 = F_8$。
- (b)，取 $n = 3$：$3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 = 34 = F_9$，另外 $F_3 + 3F_4 + 3F_5 + F_6 = 2 + 9 + 15 + 8 = 34$。
- (c)，取 $n = 3$：$-F_3 + 3F_4 - 3F_5 + F_6 = -2 + 9 - 15 + 8 = 0$。

这五条恒等式亦已用电脑验证，对所有不超过 59 的 n 都成立（在 (ii) 中则对所有不超过 49 的 m, n 成立）。

常见错误

- 在 (ii) 中比较错了元素，或者把行乘以行，会得到一条看似合理但错误的公式。$\mathbf{Q}^m\mathbf{Q}^n$ 的右上角元素用的是 $\mathbf{Q}^m$ 的第一行和 $\mathbf{Q}^n$ 的第二列。
- 对不可交换的矩阵使用 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^n$ 的二项式定理。这里每个矩阵都是 $\mathbf{Q}$ 的多项式，所以全部都可交换，但这一点值得明确指出。
- 遗漏 $k=0$ 的项：它贡献 $\mathbf{I}$，其右上角元素是 $F_0=0$。

STEP 之外

关系式 $\mathbf{Q}^2=\mathbf{I}+\mathbf{Q}$ 就是 $\mathbf{Q}$ 的凯莱–哈密顿定理（Cayley–Hamilton theorem）：每个方阵都满足它自己的特征方程（characteristic equation），这里是 $\lambda^2-\lambda-1=0$。把特征值（eigenvalues）为 $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ 的 $\mathbf{Q}$ 对角化（diagonalising），便得到 F_n 的比内（Binet）封闭公式；而矩阵的幂亦提供了一种以反复平方（repeated squaring）快速计算 F_n 的方法。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）在介绍特征值时，正是用这种方式处理斐波那契数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。