详细解答

STEP II 2023，第 5 题

纯数学 · 递推关系与收敛

STEP II 2023，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 2.7 节六位还是六百位中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/newton-speed.html

关键思路

两条递推关系（recurrence）都是用来逼近 $\sqrt{2}$ 的“机器”，而题目关心的是误差缩小得有多快。每一部分的窍门，都在于用恰当的方式量度误差：在 (i) 中考虑 $x_n^2 - 2$，它每一步都会乘以一个大小不超过 $\frac{1}{4}$ 的因子（并且改变正负号）；在 (ii) 中考虑 $y_n - \sqrt{2}$，它每一步（大致上）会被平方。乘以一个常数只带来稳定的进展；平方则每次令正确的位数加倍，这正是 (ii) 能在同样十步之内达到 10^{-600} 的原因。

解答

第 (i) 部分

(a) 我们可以把递推关系改写为

$$x_{n+1} = \frac{(x_n + 1) + 1}{x_n + 1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1}.$$

已知 $x_0 = 1 \geq 1$。若 $x_n \geq 1$，则 $x_n + 1 > 0$，故 $\frac{1}{x_n+1} > 0$，从而 $x_{n+1} > 1$。由归纳法（induction），对所有 n 都有 $x_n \geq 1$。

(b) 把各项通分至同一分母（common denominator）：

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2 &= \frac{(x_n+2)^2 - 2(x_n+1)^2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{-(x_n^2-2)}{(x_n+1)^2}. \end{aligned}$$

分母是正数，所以 $x_{n+1}^2 - 2$ 与 $x_n^2 - 2$ 的正负号相反。（两者都永不为零：由归纳法，每个 x_n 都是有理数（rational），而 $\sqrt{2}$ 是无理数（irrational）。）

取绝对值（modulus），并利用 (a) 得出的 $x_n + 1 \geq 2$，从而 $(x_n+1)^2 \geq 4$，

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n+1)^2} \leq \tfrac{1}{4}|x_n^2 - 2|,$$

此即所求。

(c) 由于 $x_0^2 - 2 = -1$，把 (b) 应用十次，得

$$|x_{10}^2 - 2| \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{10} |x_0^2 - 2| = \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576} < 10^{-6}.$$

至于正负号：$x_0^2 - 2 < 0$，而正负号每一步都会翻转，所以对每个偶数 n，$x_n^2 - 2$ 都是负数。特别地，$x_{10}^2 - 2 < 0$，因此

$$-10^{-6} < x_{10}^2 - 2 < 0, \qquad \text{即} \qquad 2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2.$$

第 (ii) 部分

(a) 首先，每个 y_n 都是正数：$y_0 = 1 > 0$，而若 $y_n > 0$，则 $y_{n+1} = \frac{y_n^2+2}{2y_n} > 0$。所以递推关系永远不会出现除以零的情况。现在

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{(y_n - \sqrt{2})^2}{2y_n},$$

因为 $(y_n - \sqrt{2})^2 = y_n^2 - 2\sqrt{2}\,y_n + 2$。这就是所求的恒等式（identity）。

至于推论部分：$y_0 = 1$。对 $n \geq 1$，把恒等式应用于 $n-1$，可见 $y_n - \sqrt{2}$ 是一个平方数除以正数 $2y_{n-1}$，所以 $y_n - \sqrt{2} \geq 0$，因此 $y_n \geq \sqrt{2} > 1$。故对所有 $n \geq 0$ 都有 $y_n \geq 1$。

(b) 记 $e_n = y_n - \sqrt{2}$ 及 $r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$。由 (a)，对 $n \geq 1$ 有 $e_n \geq 0$；又因为 $y_n \geq 1$，

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2y_n} \leq \frac{e_n^2}{2}.$$

我们用归纳法证明对 $n \geq 1$ 有 $e_n \leq 2r^{2^n}$。

基本情况（*base case*）$n = 1$。$y_1 = \frac{3}{2}$，所以 $e_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$，而

$$2r^2 = 2 \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \tfrac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

所以上界在此取等号。

归纳步骤（*inductive step*）。假设对某个 $n \geq 1$ 有 $0 \leq e_n \leq 2r^{2^n}$。

想一想 为甚么我们可以把 $e_n \leq 2r^{2^n}$ 的两边平方?

对非负数之间的不等式取平方，不等式仍然成立，而 $e_n \geq 0$ 正是 (a) 部分给我们的结果。（这也是上界由 $n = 1$ 而非 $n = 0$ 开始的原因：$e_0 = 1 - \sqrt{2}$ 是负数。）所以

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{\left(2r^{2^n}\right)^2}{2} = \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}},$$

归纳法至此完成。

(c) 下界 $y_{10} \geq \sqrt{2}$ 已在 (a) 证明。至于上界，由 $\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$ 得 $0 < r < \frac{1}{4}$，所以由 (b)

$$y_{10} - \sqrt{2} \leq 2r^{2^{10}} = 2r^{1024} < 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^{1024} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

要把它与 10 的幂比较，可利用 $2^{10} = 1024 > 10^3$：

$$2^{2047} > 2^{2040} = \left(2^{10}\right)^{204} > \left(10^3\right)^{204} = 10^{612} > 10^{600}.$$

因此 $y_{10} - \sqrt{2} < 2^{-2047} < 10^{-600}$，综合而言

$$\sqrt{2} \leq y_{10} \leq \sqrt{2} + 10^{-600}.$$

想一想 (ii) 中惊人的速度从何而来?

在 (i) 中，误差每次最多乘以 $\frac{1}{4}$，所以十步只能多得大约六个小数位。在 (ii) 中，误差每次（大致上）被平方，所以指数 2^n 不断加倍：十步就能把误差由大约 $\frac{1}{10}$ 降至低于 10^{-600}。

验算

- 首几项：$x_1 = \frac{3}{2}$，$x_2 = \frac{7}{5}$，$x_3 = \frac{17}{12}$，而 $x_n^2 - 2$ 依次为 -1，$\frac{1}{4}$，$-\frac{1}{25}$，$\frac{1}{144}$：正负交替，而且每次至少缩小 4 倍。
- 用分数精确计算，得 $x_{10}^2 \approx 2 - 3.0 \times 10^{-8}$，稳稳落在区间 $[2 - 10^{-6}, 2]$ 之内。
- $y_2 = \frac{17}{12}$，所以 $y_2 - \sqrt{2} \approx 0.00245$，对比上界 $2r^4 \approx 0.00368$。用电脑以精确分数验算，得 $y_{10} - \sqrt{2} \approx 10^{-783}$，远低于所保证的 $2^{-2047} \approx 10^{-616}$。

常见错误

- 在 (i)(c) 中忘记考虑正负号：单靠绝对值的上界只能得出 $2-10^{-6} \le x_{10}^2 \le 2+10^{-6}$；上界 2 需要用到正负号交替这一点。
- 未先确定 $e_n \ge 0$ 便把 $e_n \le 2r^{2^n}$ 平方。
- 停在 2^{-2047}，而没有真正把它与 10^{-600} 比较；用不等式 $2^{10} > 10^3$ 是最简洁的做法。

STEP 之外

(ii) 中的递推关系，就是把牛顿（Newton）法（Newton's method）应用于 $f(y) = y^2 - 2$；而 (ii)(a) 中的恒等式，正是在说牛顿法在单根（simple root）附近二次收敛（quadratic convergence），而 (i) 则是收敛率不超过 $\frac{1}{4}$ 的线性收敛（linear convergence）的例子。数 x_n 亦是 $\sqrt{2}$ 的连分数（continued fraction）的渐近分数（convergents）。收敛阶（order of convergence）和不动点迭代（fixed-point iteration）都是大学第一个数值分析（numerical analysis）课程的标准课题，而背后的分析理论在 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）中有仔细的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。