详细解答

STEP II 2023，第 4 题

纯数学 · 消去多项式中的根式

STEP II 2023，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 6.3 节以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 为根的多项式中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/field-extensions.html

关键思路

要从方程中消去根式（surd），就把所有含该根式的项移到一边，其余的项移到另一边，然后平方（或立方）。每一部分用的都是同一招：把数写成“一个好处理的数加上一个根式”，把该根式单独分离出来，再升幂直至它消失为止。如果展开后仍有根式残留，就把含它的项集中到一边，再重复一次。

解答

第 (i) 部分

展开 $(x-\sqrt{2})^2=3$，得 $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=3$，即

$$x^2-1=2\sqrt{2}\,x.$$

现在根式已单独在一边，于是两边平方：

$$x^4-2x^2+1=8x^2 \quad\Longrightarrow\quad x^4-10x^2+1=0,$$

得证。（平方只是单向推导，但这正是我们所需要的：每个满足第一条方程的 x 都满足第二条方程。）

至于推论部分，取 $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$。那么 $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$，所以 $(x-\sqrt{2})^2=3$，而由刚才所证，$\mathrm{f}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$。

第 (ii) 部分

设 $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 及 $y = x-\sqrt{5} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$。由第 (i) 部分，$y^4 - 10y^2 + 1 = 0$。现在把它改写成以 x 表示。首先，

$$y^2 = (x-\sqrt{5})^2 = (x^2+5) - 2\sqrt{5}\,x,$$

因此

$$\begin{aligned} y^4 &= (x^2+5)^2 - 4\sqrt{5}\,x(x^2+5) + 20x^2 \\ &= x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} 0 &= y^4 - 10y^2 + 1 \\ &= \left(x^4 + 30x^2 + 25 - 4\sqrt{5}\,x^3 - 20\sqrt{5}\,x\right) - 10\left(x^2 + 5 - 2\sqrt{5}\,x\right) + 1 \\ &= x^4 + 20x^2 - 24 - 4\sqrt{5}\,x^3. \end{aligned}$$

$\sqrt{5}\,x$ 的项恰好互相抵消，相当幸运。现在只剩下一个含根式的项，于是把它分离出来再平方：

$$x^4 + 20x^2 - 24 = 4\sqrt{5}\,x^3 \quad\Longrightarrow\quad (x^4 + 20x^2 - 24)^2 = 80x^6.$$

展开左边，

$$\begin{aligned} (x^4 + 20x^2 - 24)^2 &= x^8 + 40x^6 + 400x^4 - 48x^4 - 960x^2 + 576 \\ &= x^8 + 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576. \end{aligned}$$

减去 $80x^6$ 后，可取

$$\mathrm{g}(x) = x^8 - 40x^6 + 352x^4 - 960x^2 + 576,$$

它的次数（degree）为 8，具有整数系数（integer coefficients），并且 $\mathrm{g}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) = 0$。

> **想一想** 为甚么我们先利用第 (i) 部分处理 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$，最后才消去 $\sqrt{5}$，而不是从头开始？

第 (i) 部分已经消去了三个根式中的两个，所以我们只需再处理一个。以平方消去一个根式会使次数加倍，由 4 变成 8，这正好是题目所要求的次数。若从头开始，就要同时应付三个根式。

第 (iii) 部分

设 $x = a + \sqrt{2}$，则 $a = x - \sqrt{2}$，且 $a^3 - 3a + 1 = 0$。展开，

$$(x-\sqrt{2})^3 = x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2},$$

所以

$$0 = (x-\sqrt{2})^3 - 3(x-\sqrt{2}) + 1 = x^3 + 3x + 1 - \sqrt{2}\,(3x^2 - 1).$$

把根式分离出来再平方：

$$x^3 + 3x + 1 = \sqrt{2}\,(3x^2-1) \quad \Longrightarrow \quad (x^3+3x+1)^2 = 2(3x^2-1)^2.$$

两边分别为

$$\begin{aligned}(x^3+3x+1)^2 &= x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 6x + 1,\\ 2(3x^2-1)^2 &= 18x^4 - 12x^2 + 2,\end{aligned}$$

所以可取

$$\mathrm{h}(x) = x^6 - 12x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 6x - 1.$$

我们只用到 a 满足 $t^3 - 3t + 1 = 0$ 这一事实，所以同样的推导亦适用于 b 和 c。因此 $\mathrm{h}(a+\sqrt{2}) = \mathrm{h}(b+\sqrt{2}) = \mathrm{h}(c+\sqrt{2}) = 0$。

第 (iv) 部分

平方无法消去立方根（cube root），所以我们需要另一个恒等式（identity）。设 $p = \sqrt[3]{2}$、$q = \sqrt[3]{3}$ 及 $x = p + q$。由二项式展开（binomial expansion）得

$$x^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p+q) = 5 + 3pq\,x.$$

> ? **想一想** pq 仍然是无理数（irrational），怎样才能把它消去?

这里 $pq = \sqrt[3]{6}$ 是唯一剩下的无理量，而且它只以因子的形式出现。我们把它分离出来再立方，并利用 $(pq)^3 = 6$：

$$x^3 - 5 = 3pq\,x \quad \Longrightarrow \quad (x^3-5)^3 = 27\cdot 6\,x^3 = 162x^3.$$

由于 $(x^3-5)^3 = x^9 - 15x^6 + 75x^3 - 125$，可取

$$\mathrm{k}(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125,$$

它具有整数系数，且 $\mathrm{k}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$。

验算

- 在第 (ii) 部分，$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \approx 5.38233$。由 $x^2 \approx 28.9695$，得 $x^8 \approx 704\,310$ 及 $40x^6 \approx 972\,485$。再者 $352x^4 \approx 295\,410$ 及 $960x^2 \approx 27\,811$，而 g 的各项在舍入误差范围内互相抵消。

- 改变 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{5}$ 的正负号都不会改变 $\mathrm{g}(x)$，所以全部八个数 $\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{5}$ 都是根（root）。这解释了为何次数是 8。同理，h 有六个根 $a\pm\sqrt{2}$、$b\pm\sqrt{2}$、$c\pm\sqrt{2}$。
- $t^3-3t+1=0$ 的根是 $2\cos 40^\circ$、$2\cos 160^\circ$ 和 $2\cos 280^\circ$。例如 $a\approx 1.53209$ 给出 $a+\sqrt{2}\approx 2.94630$，而 $\mathrm{h}(2.94630)$ 在舍入误差范围内等于零。
- 在第 (iv) 部分，$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\approx 2.70217$，而 $\mathrm{k}(2.70217)$ 在舍入误差范围内等于零。以电脑验算，确认四个多项式（polynomial）的结果均准确至约 10^{-10}。

常见错误

- 未把根式分离出来就平方。若两边都留有 $\sqrt{5}$ 的项，它们便不会抵消。
- 在第 (iv) 部分尝试平方，或者把 x 立方却没有留意到 $x^3=5+3pqx$。展开式 $(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)$ 就是整个窍门所在。
- 在第 (iii) 部分展开三次式时弄错正负号，尤其是常数项 $-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$。

STEP 之外

若一个数是某个整数系数多项式的根，就称它为*代数数*（algebraic）。这道题以人手计算的方式说明了代数数之和仍是代数数。一般情况的证明要用到线性代数（linear algebra）：$\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限维向量空间（finite-dimensional vector space）。因此幂 $1,\alpha+\beta,(\alpha+\beta)^2,\ldots$ 最终必定线性相关（linearly dependent）。这里出现的次数 4、8、6 和 9，正是这些*域扩张*（field extensions）的维数。想进一步了解，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。