详细解答

STEP II 2023，第 3 题

纯数学 · 多项式与导数

STEP II 2023，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

对 q 求导（differentiate），只会把和式中的每一项向后移一位，而最后一个导数为零，所以 $q' = q - p$。整道题都由这一个关系推动。之后三个证明 $q > 0$ 的方法，分别从三个角度解读这个关系：作为关于驻点（stationary point）的事实；作为 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ 的导数（即积分因子（integrating factor））；以及作为反复使用分部积分法（integration by parts）所得的积分公式。

解答

以下一律记 $p(x) = ax^n + \ldots$，其中 $a \neq 0$。对于 $k \geq 1$，$p^{(k)}$ 的次数小于 n（或为零），而 $p^{(n+1)} \equiv 0$。

第 (i) 部分

(a) 奇数次多项式（polynomial）在实数线的一端趋向 $+\infty$，在另一端趋向 $-\infty$。由于它是连续的，根据介值定理（intermediate value theorem），它必在某处取值 0。但对所有 x 都有 $p(x) > 0$，所以 p 没有实根，因此 n 必为偶数。

此外 $a > 0$：若 $a < 0$，则当 $x \to \infty$ 时 $p(x) \to -\infty$，与 $p > 0$ 矛盾。在 $q = p + p' + \cdots + p^{(n)}$ 中，第一项以后的每一项次数都小于 n，所以 q 的次数亦为 n，而首项系数（leading coefficient）为 $a > 0$。因此当 $x \to \infty$ 时 $q(x) \to +\infty$（而由于 n 是偶数，当 $x \to -\infty$ 时亦然），所以 q 必定取到正值。（若 $n = 0$，则 $q = p$ 是正的常数。）

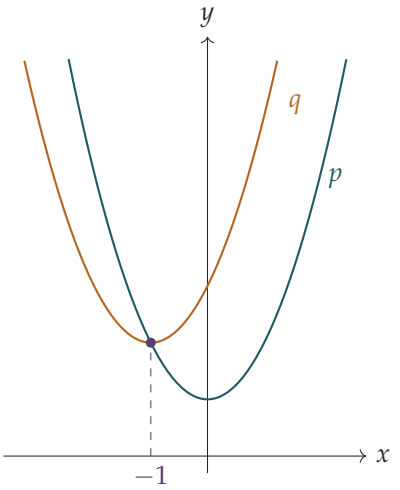
(b) 逐项求导，

$$q'(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} p^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) - p(x) + p^{(n+1)}(x) = q(x) - p(x),$$

因为对于 n 次多项式，$p^{(n+1)} \equiv 0$。

第 (ii) 部分

(a) 在 $y = q(x)$ 的驻点 x_0 处，有 $q'(x_0) = 0$，所以由 (i)(b) 得 $q(x_0) = p(x_0)$：两条曲线在该处相交。



（图中所示为 $p(x) = x^2 + 1$，此时 $q(x) = x^2 + 2x + 3$。q 的最小值在 $x = -1$ 处，正正是两条曲线相交之处。）

现在证明 $q > 0$。若 $n = 0$，则 $q = p > 0$，所以设 $n \geq 2$。由 (i)(a)，当 $x \to \pm\infty$ 时 $q(x) \to +\infty$，所以可以选取 $R > 0$，使得只要 $|x| > R$，便有 $q(x) > q(0)$。

想一想 我们怎样知道 q 确实有最低点，而且该点是驻点?

在闭区间 $[-R, R]$ 上，连续函数 q 在某点 x_0 取得最小值，且 $q(x_0) \leq q(0)$。在区间以外，q 大于 $q(0)$，所以 $q(x_0)$ 是 q 在整条实数线上的最小值。由于 x_0 是 $\mathbb{R}$ 的内点（interior point），且 q 可导（differentiable），故 $q'(x_0) = 0$。由第一个结果，$q(x_0) = p(x_0) > 0$。所以对每个 x，

$$q(x) \geq q(x_0) = p(x_0) > 0.$$

(b) 利用 (i)(b)，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x} q(x)) = \mathrm{e}^{-x}(q'(x) - q(x)) = -\mathrm{e}^{-x} p(x) < 0$$

对所有 x 成立，因为 $p>0$。所以 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ 是（严格）递减的。

至于 $q>0$：由于 q 是多项式，当 $X\to\infty$ 时 $\mathrm{e}^{-X}q(X)\to 0$（指数函数增长得比幂函数快）。递减函数永远不会低于它在 $+\infty$ 的极限，所以对所有 X 都有 $\mathrm{e}^{-X}q(X)\geq 0$。于是对任意 x，严格递减给出

$$\mathrm{e}^{-x}q(x)>\mathrm{e}^{-(x+1)}q(x+1)\geq 0,$$

再乘以 $\mathrm{e}^{x}>0$，便得 $q(x)>0$。

(c) 这里所有积分都收敛（converge），因为 t 的多项式乘以 e^{-t} 在 $[0,\infty)$ 上可积。取 $u=p(x+t)$ 及 $\mathrm{d}v=\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 作分部积分（把 x 视为常数）：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t&=\Big[-p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty+\int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\&=p(x)+\int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

因为当 $t\to\infty$ 时 $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\to 0$。这就是第一个结果。

上述计算除了 p 是多项式之外，没有用到 p 的任何其他性质，所以同样的结果对每一个导数都成立：记

$$I_k(x)=\int_0^\infty p^{(k)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\qquad\text{我们有}\qquad I_k(x)=p^{(k)}(x)+I_{k+1}(x)$$

对于 $k=0,1,\ldots,n$ 成立。此外 $I_{n+1}(x)=0$，因为 $p^{(n+1)}\equiv 0$。反复应用这个关系，

$$I_0(x)=p(x)+I_1(x)=p(x)+p^{(1)}(x)+I_2(x)=\cdots=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)+I_{n+1}(x)=q(x),$$

这就是第二个结果。

> ? **想一想** 为甚么这条公式令 $q(x)>0$ 变得显而易见?

对每个固定的 x，被积函数（integrand）$p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ 对每个 $t\geq 0$ 都连续且严格为正，因为 $p>0$ 处处成立。连续且严格为正的函数在长度为正的区间上的积分严格为正。所以对所有 x，$q(x)=I_0(x)>0$。

验算

- 取 $p(x)=x^2+1$，得 $q(x)=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$。确实 $q'=2x+2=q-p$，q 的最小值为 2，在 $x=-1$ 处取得，而 $p(-1)=2$，正如 (ii)(a) 所预测。
- 对同一个 p，在 $x=0$ 处：$\int_0^\infty(t^2+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=2!+1=3=q(0)$。
- 我们用电脑对 300 个次数不超过 6 的随机处处为正多项式作验证：$q'=q-p$ 准确成立；在 $[-20,20]$ 的网格上 $q>0$ 而 $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ 递减；以及数值积分重现 $q(x)$ 至约十位有效数字。

常见错误

- 在 (ii)(a) 中，没有给出理由便假设最小值存在。这需要在两端都有 $q \to +\infty$，而这用到 (i)(a) 中的 n 为偶数及 $a > 0$。
- 在 (ii)(b) 中，只由极限得出 $\mathrm{e}^{-x}q(x) \geq 0$ 便停下。正是严格递减把这个结论提升为 $q(x) > 0$。
- 忘记了边界项 $p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ 必须在 $t \to \infty$ 时趋于零，才可以把它舍去。

STEP 之外

(ii)(b) 中的函数 e^{-x} 是一个积分因子,而 (ii)(c) 则明确地解出 $q' - q = -p$。公式 $\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 是一种拉普拉斯变换（Laplace transform）式的积分, 而恒等式 $q = (1 + D + D^2 + \cdots)p = (1 - D)^{-1}p$（其中 D 表示求导）则让人初尝线性微分方程（linear differential equations）的算子方法（operator methods）。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）涵盖积分因子及拉普拉斯变换；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）则把 (ii)(a) 中的极值论证严格化。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。