详细解答

STEP II 2023，第 2 题

纯数学 · 三角代换

STEP II 2023，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

每条等式的右方，其实都是一条熟悉的倍角公式（multiple-angle formula）换了个样子：当 $t = \tan\alpha$ 时，$\frac{2t}{1-t^2}$ 就是 $\tan 2\alpha$，$\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ 就是 $\tan 3\alpha$；而当 $t = \cos\alpha$ 时，$2t^2 - 1$ 就是 $\cos 2\alpha$。作代换（substitution）后，三条互相牵连的方程便化为一条只含一个角的三角方程，既容易求解，更重要的是容易计数。唯一要小心的，是确保这个代换恰好把每个解都捕捉一次。

解答

第 (i) 部分

每个实数都恰好对应 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 中的一个 α，使该实数等于 $\tan\alpha$，所以把 x 写成 $x = \tan\alpha$（其中 α 在该区间内）不会遗失任何解。第一条方程要有意义，须有 $x \neq \pm 1$，即 $\alpha \neq \pm\frac{1}{4}\pi$，因此 2α 不是 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇数倍，可以使用二倍角公式（double-angle formula）：

$$y = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

对 $y = \tan 2\alpha$ 作完全相同的步骤（由于 z 有定义，故 $y \neq \pm 1$），得 $z = \tan 4\alpha$；再对 z 作同样步骤（由于 $z \neq \pm 1$），得 $x = \tan 8\alpha$。又因 $x = \tan\alpha$，故

$$\tan\alpha = \tan 8\alpha,$$

此即所求。两个角的正切相等，当且仅当两角相差 π 的整数倍，所以对某整数 k 有 $8\alpha = \alpha + k\pi$，即

$$\alpha = \frac{k\pi}{7}.$$

条件 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 等价于 $-\frac{7}{2} < k < \frac{7}{2}$，所以 $k = -3, -2, \ldots, 3$。

反过来，这七个值每一个都给出真正的解：$2\alpha = \frac{2k\pi}{7}$ 和 $4\alpha = \frac{4k\pi}{7}$ 永远不会是 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇数倍（否则 $4k$ 或 $8k$ 须等于 7 乘一个奇数，于是 $7 \mid k$，迫使 $k = 0$，但这时得到的是 0，并非奇数倍），所以 x, y, z 都不等于 ± 1，每个分母都不为零，上面的推导可以倒过来进行。不同的 k 给出 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 中不同的 α，因而给出不同的 x。所以恰好有七个解。

要以题目要求的形式写出这些解，可利用 $\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$，把 2α 和 4α 减去 π 的倍数，化到 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 之内。例如 $\tan\frac{4\pi}{7} = \tan(-\frac{3\pi}{7})$，$\tan\frac{8\pi}{7} = \tan\frac{\pi}{7}$。记 $t_m = \tan\frac{m\pi}{7}$，则解 (x, y, z) 为：

k	(x, y, z)
0	$(0, 0, 0)$
1	$(t_1,\ t_2,\ t_{-3})$
2	$(t_2,\ t_{-3},\ t_1)$
3	$(t_3,\ t_{-1},\ t_{-2})$

k	(x, y, z)
-1	$(t_{-1},\ t_{-2},\ t_3)$
-2	$(t_{-2},\ t_3,\ t_{-1})$
-3	$(t_{-3},\ t_1,\ t_2)$

留意除 $(0, 0, 0)$ 外，这些解正是 (t_1, t_2, t_{-3}) 和 (t_{-1}, t_{-2}, t_3) 的循环排列（cyclic rearrangement）。这是必然的，因为方程组在 $x \to y \to z \to x$ 之下保持不变。

第 (ii) 部分

先推导三倍角公式（triple-angle formula）：设 $t = \tan\alpha$，

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t^2}{1-t^2}} = \frac{2t + t - t^3}{1 - t^2 - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

与前相同，设 $x = \tan\alpha$，其中 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$。方程要求 $1 - 3x^2$、$1 - 3y^2$、$1 - 3z^2$ 皆不为零；在此前提下，公式依次给出 $y = \tan 3\alpha$、$z = \tan 9\alpha$ 和 $x = \tan 27\alpha$。于是 $\tan\alpha = \tan 27\alpha$，得 $26\alpha = k\pi$，即

$$\alpha = \frac{k\pi}{26}, \qquad -13 < k < 13.$$

这是 α 的 25 个候选值，各自给出不同的 x 值。

? **想一想** 这 25 个候选值当中，会不会有些令某个分母为零，因而并非真正的解？

这正是需要检查的地方。分母 $1 - 3\tan^2\beta$ 在 $\beta \equiv \pm\frac{1}{6}\pi \pmod{\pi}$ 时为零，而当 β 是 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇数倍时，正切本身没有定义。这里涉及的角是 $\beta = 3^j \cdot \frac{k\pi}{26}$，其中 $j = 0, 1, 2$。

- 若 $3^j k\pi/26 = \pm\frac{1}{6}\pi + m\pi$，则 $3^{j+1}k = \pm 13 + 78m$。左方是 3 的倍数，右方却不是（因为 78 是 3 的倍数而 13 不是）。不可能。
- 若 $3^j k\pi/26 = \frac{1}{2}(2m+1)\pi$，则 $3^j k = 13(2m+1)$，所以 13 整除 k，迫使 $k = 0$；但这时左方为 0，并非 13 的奇数倍。不可能。

所以每个候选值都是真正的解，方程组恰好有 25 个实数解。（区间所排除的 $k = \pm 13$ 对应 $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$，此时 $\tan\alpha$ 不存在。）

第 (iii)(a) 部分

现在 $|x| \le 1$，所以可以对恰好一个 $\alpha \in [0, \pi]$ 写 $x = \cos\alpha$。二倍角公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ 给出 $y = \cos 2\alpha$，继而 $z = \cos 4\alpha$ 及 $x = \cos 8\alpha$；这些自动满足 $|y| \le 1$ 和 $|z| \le 1$。因此三者皆在 $[-1, 1]$ 内的解，恰好对应满足

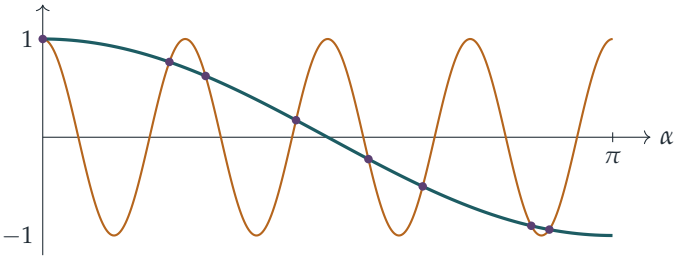
$$\cos 8\alpha = \cos\alpha.$$

的 $\alpha \in [0, \pi]$。两个角的余弦相等，当且仅当两角在相差 2π 的整数倍的意义下相等或互为相反数，所以

$$8\alpha = \alpha + 2m\pi \quad \text{或} \quad 8\alpha = -\alpha + 2n\pi, \qquad \text{即} \qquad \alpha = \frac{2m\pi}{7} \quad \text{或} \quad \alpha = \frac{2n\pi}{9}.$$

在 $[0, \pi]$ 内，第一族给出 $m = 0, 1, 2, 3$，即 $0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$；第二族给出 $n = 0, 1, 2, 3, 4$，即 $0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$。唯一重叠的是 $\alpha = 0$（公共值须满足 $\frac{m}{7} = \frac{n}{9}$，即 $9m = 7n$，迫使 $7 \mid m$）。于是剩下 $4 + 5 - 1 = 8$ 个不同的 α 值；由于余弦在 $[0, \pi]$ 上是一一对应（one-to-one）的，它们给出 8 个不同的 x 值，每个 x 决定 y 和 z。所以满足 $|x|, |y|, |z| \le 1$ 的解恰好有 8 个。

下图显示在 $[0, \pi]$ 上 $\cos 8\alpha$（琥珀色）与 $\cos\alpha$（青绿色）的八个交点。



第 (iii)(b) 部分

现在取消限制。消去 y 和 z：$y = 2x^2 - 1$ 是 x 的二次式，所以 $z = 2y^2 - 1$ 是 x 的 4 次多项式（polynomial），于是 $x = 2z^2 - 1$ 变成

$$x = 2\Big(2\big(2x^2 - 1\big)^2 - 1\Big)^2 - 1,$$

这是 x 的 8 次多项式方程（右方的首项（leading term）是 $2 \cdot (2 \cdot 2^2)^2 x^8 = 128x^8$，没有任何项能把它抵消）。展开后为

$$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 - x + 1 = 0.$$

方程组的每个解 (x,y,z) 中，x 都是这个八次多项式（octic）的根，而 x 决定 y 和 z。8 次多项式最多有 8 个实根，而 (a) 部分已经找到 8 个不同的实根，即该部分求得的八个 α 值所对应的 $\cos\alpha$。所以这些就是全部的根，方程组的每个解都是 (a) 中八个解之一。特别地，每个解都满足 $|x|\le 1$、$|y|\le 1$、$|z|\le 1$，这正是要证明的。

> ? **想一想** 为甚么 (b) 需要用到次数，而不能单靠 (a) 的八个解?

(a) 部分只找出 $[-1,1]$ 内的解；单凭它，对例如 $x=5$ 的情况甚么也说不出来。排除其他一切可能的，是次数的上界：八次多项式最多只有八个根，而 (a) 已经把它们用尽。

验算

- 在 (i) 中取 $k=1$：$\tan\frac{\pi}{7}\approx 0.4816$，而 $\frac{2(0.4816)}{1-0.4816^2}\approx 1.2540=\tan\frac{2\pi}{7}$。再做两步便回到 0.4816。
- 以电脑在实数线上搜索 $f(f(f(x)))=x$ 的根，对 $f(t)=\frac{2t}{1-t^2}$ 恰好找到 7 个根，对 $f(t)=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ 恰好找到 25 个，后者与 $\tan\frac{k\pi}{26}$（$|k|\le 12$）吻合。
- 在 (iii) 中，$x=1$ 给出 $y=z=1$，即 $\alpha=0$ 的解；而确实 $128-256+160-32-1+1=0$。在 $[-50,50]$ 上搜索该八次多项式的根，恰好找到 8 个，全部在 $[-1,1]$ 内。

常见错误

- 在 (ii) 中容许 $k=\pm 13$（或完全不限制 α），得出 27 个解；$\alpha=\pm\frac{1}{2}\pi$ 并不对应任何实数 x。
- 在 (iii)(a) 中漏掉第二族 $8\alpha=-\alpha+2n\pi$，或把 $\alpha=0$ 计算了两次。
- 在 (i) 中没有化简 $\tan\frac{4\pi}{7}$ 之类的答案，而题目要求角度须在 $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ 之内。

STEP 之外

满足 $T_n(\cos\alpha)=\cos n\alpha$ 的多项式 T_n 称为切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials）；第 (iii) 部分就是方程 $T_8(x)=x$，而上面的八次多项式就是 $T_8(x)-x$。反复迭代像 $x\mapsto 2x^2-1$ 这样的映射，并追问哪些点在三步后回到原处，正是动力系统（dynamical systems）理论的起点：这个映射在 $[-1,1]$ 上是“混沌”（chaotic）的，而角度代换把它变成简单的倍增 $\alpha\mapsto 2\alpha$。同样的技巧也解释了为何 (i) 和 (ii) 中的正切映射有那么多周期点（periodic points）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）收录了更多同类题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。