详细解答

STEP II 2023，第 10 题

力学 · 抛体轨道的包络线

STEP II 2023，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

一条轨迹与曲线 E 相切，当且仅当求它们公共点的方程有重根，所以第 (i) 部分其实是一个判别式（discriminant）的计算。要求对每一个角度都出现这种情况，便迫使 E 成为所有轨迹的包络线（envelope），即速度为 u 的质点所能到达范围的边界。题目其余部分从三个角度审视这条边界：哪些点可以被击中、质点在某一固定时刻位于何处，以及沿着包络线本身滑行的第二粒质点。

解答

全题中，质点视为只受重力作用而自由运动的点，不计空气阻力，并记 $c=\cos\alpha$，$s=\sin\alpha$。

第 (i) 部分

设 t 为抛出后经过的时间，则 P_α 一直留在平面 $y=0$ 上，且

$$x=uct,\qquad z=ust-\tfrac{1}{2}gt^2.$$

消去 $t=x/(uc)$，得到轨迹（trajectory）

$$z=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2u^2c^2}.$$

与 E 的公共点满足 $A-Bx^2=x\tan\alpha-\dfrac{gx^2}{2u^2c^2}$，即

$$\left(\frac{g}{2u^2c^2}-B\right)x^2-x\tan\alpha+A=0. \qquad (*)$$

若 x^2 的系数为零，则 $(*)$ 是线性方程，而 $\tan\alpha \neq 0$，这只会给出一个穿越点而非相切，所以 $(*)$ 确实是二次方程。两曲线恰好相切一次，当且仅当 $(*)$ 有重根，即其判别式为零：

$$\tan^2\alpha = 4A\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right).$$

两边乘以 u^2c^2：

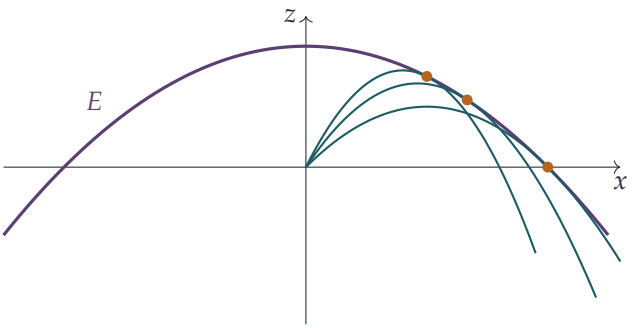
$$\begin{aligned} u^2s^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \\ u^2 - u^2c^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \qquad (\text{利用} s^2 = 1 - c^2) \\ u^2 - 2gA &= u^2(1 - 4AB)\cos^2\alpha, \end{aligned}$$

此即所求。

若此式对 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 中每一个 α 都成立，则左边是常数，而 $\cos^2\alpha$ 取遍 $(0,1)$ 中所有值。一个常数对所有这些值都等于 $k\cos^2\alpha$，便迫使 $k = 0$，从而该常数为 0。所以 $u^2 = 2gA$ 且 $4AB = 1$：

$$A = \frac{u^2}{2g}, \qquad B = \frac{g}{2u^2}.$$

反过来，这些值使恒等式对每一个 α 都成立。切点就是重根 $x = \dfrac{\tan\alpha}{2(g/(2u^2c^2) - B)} = \dfrac{u^2}{g\tan\alpha}$。



上图（取 $u^2/g = 2$ 绘制）显示三条轨迹，每条都在琥珀色的点与 E 相切一次。

第 (ii) 部分

每粒质点都在包含其初速度的铅垂平面内运动，而整个情况关于 z 轴对称。因此考虑一个与 z 轴水平距离为 r、高度为 z 的点，并在通过该点的铅垂平面内处理，设 $\theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 为朝该点方向、高于水平线的抛射角。

若 $r = 0$，只有垂直向上或向下射出的质点能够到达；向上射出的那粒可到达不超过 $u^2/(2g)$ 的每一个高度，向下射出的那粒可到达每一个负高度，所以轴上可到达的点就是满足 $z \leq u^2/(2g)$ 的点。

若 $r > 0$，与第 (i) 部分完全一样，质点经过该点当且仅当

$$z = r\tan\theta - \frac{gr^2}{2u^2}(1+\tan^2\theta),$$

这里用了 $1/\cos^2\theta = 1+\tan^2\theta$。记 $T = \tan\theta$，它可取任何实数值，于是得到二次方程

$$\frac{gr^2}{2u^2}T^2 - rT + \left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) = 0,$$

它有实根当且仅当

$$r^2 \geq \frac{2gr^2}{u^2}\left(z+\frac{gr^2}{2u^2}\right) \iff z \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gr^2}{2u^2},$$

这里除以了 $2gr^2/u^2 > 0$。

所以，由 $r^2 = x^2+y^2$，可被击中的点恰好是位于抛物面（paraboloid）

$$z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g}{2u^2}(x^2+y^2),$$

之上或其下方的点；这个曲面正是把 E（取第 (i) 部分的值）绕 z 轴旋转而得的。严格位于其下方的点可由平面内两个方向到达，位于其上的点恰好由一个方向到达（即重根，与第 (i) 部分的相切吻合），而位于其上方的点则无法到达。

第 (iii) 部分

设质点的初速度为 $u\mathbf{n}$，其中 $\mathbf{n}$ 是单位向量（unit vector）。经过时间 t 后，其位置为

$$\mathbf{r} = ut\,\mathbf{n} - \tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k},$$

其中 $\mathbf{k}$ 是向上的单位向量。因此

$$|\mathbf{r} - (-\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k})| = |ut\,\mathbf{n}| = ut.$$

所以在时刻 t，每粒质点都位于以 $(0,0,-\frac{1}{2}gt^2)$ 为球心、ut 为半径的球面上。从物理角度看：重力使每粒质点获得相同的加速度，所以相对于一个从原点自由下落的点，它们全都以速率 u 沿直线向外飞散。

第 (iv) 部分

设 τ 为 Q 抛出后经过的时间，则 Q 有 $y = 0$ 及

$$x = u\tau, \qquad z = A - \tfrac{1}{2}g\tau^2.$$

代入 $\tau = x/u$：

$$z = A - \frac{g}{2u^2}x^2 = A - Bx^2,$$

这里用了第 (i) 部分的 $B = g/(2u^2)$。所以 Q 一直在 E 上。

第 (v) 部分

假设 Q 在爆炸后时刻 T 抛出，并且 Q 与 P_α 在爆炸后时刻 t $(\geq T)$ 位于同一点。那么 $\tau = t - T$，而两者的 y 坐标都是 0，所以需要 x 坐标和 z 坐标相等：

$$uct = u(t-T),$$
$$ust - \tfrac{1}{2}gt^2 = A - \tfrac{1}{2}g(t-T)^2.$$

第一式给出 $t - T = ct$，所以 $T = t(1-c)$。把 $t - T = ct$ 代入第二式，并利用 $1 - c^2 = s^2$：

$$ust - \tfrac{1}{2}gs^2t^2 = A = \frac{u^2}{2g}.$$

想一想 怎样不用繁琐的公式来解出 t?

乘以 $2g$ 并把所有项移到一边：$g^2s^2t^2 - 2gus\,t + u^2 = 0$，这是一个完全平方

$$(gst - u)^2 = 0, \qquad \text{所以} \qquad t = \frac{u}{g\sin\alpha}.$$

出现重根正是意料之中：碰撞必须发生在 P_α 的轨迹与 E 相切之处，因为那是两条路径唯一的公共点。事实上，此时 P_α 位于 $x = uct = u^2/(g\tan\alpha)$，正是第 (i) 部分求得的切点。因此

$$T = t(1-\cos\alpha) = \frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha},$$

此即所求。由于 $0 < 1 - \cos\alpha < 1$，得 $0 < T < t$，所以 Q 确实是在爆炸之后、碰撞之前抛出的。

验算

- 在第 (i) 部分，取 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 得切点 $x = u^2/g$，$z = 0$：这是在水平地面上的最大射程，可到达区域的边界理应经过此点。
- 在第 (ii) 部分，在轴 $r = 0$ 上，界限是 $z \leq u^2/(2g)$，即垂直向上射出的质点所达的最大高度。
- 在第 (v) 部分，取 $u = 7$、$g = 9.8$ 及 $\alpha = 0.5$，公式给出 $T \approx 0.182$；把两个运动逐步按时间推进，可确认两粒质点在 $t = u/(g\sin\alpha) \approx 1.49$ 相遇，而即使把 Q 延迟 0.05 才抛出，它们便会错过。
- 当 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 时，$T \to u/g$ 且 $t \to u/g$：P_α 几乎垂直向上，到达 E 的顶点 $(0, 0, A)$，到达时刻为 u/g，恰好是 Q 从那里出发的时刻。

常见错误

- 未先把公共点方程整理成关于 x 的单一二次方程便令判别式为零，结果在 x^2 的系数中漏掉了 $-B$ 项。
- 在第 (ii) 部分只描述边界曲面：题目要求的是整个集合，即抛物面之上及其下方的实心区域。
- 在第 (v) 部分，两粒质点用了同一个时间变量：Q 只运动了 $t-T$ 的时间。

STEP 之外

曲线 E 是这族轨迹的*包络线*：一条与族中每一成员都相切的曲线。一般而言，曲线族 $F(x,z,\alpha)=0$ 的包络线可通过在 $F=0$ 与 $\partial F/\partial\alpha=0$ 之间消去 α 求得，这就是本题所用重根条件的微积分版本。第 (ii) 部分的抛物面常被称为*安全抛物面*（paraboloid of safety），而第 (iii) 部分则是转换到自由下落参考系（freely falling frame）的一个例子，在该参考系中重力消失了。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这两个概念都有阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。