详细解答

STEP II 2023，第 1 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 2023，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2023 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

关键思路

代换（substitution）$x = 1/t$ 把 $\frac{1}{2}$ 和 2 互换，因此它把区间（interval）$[\frac{1}{2}, 2]$ 映射到自身（方向相反）。于是，在这个区间上的积分（integral）可以改写成在同一区间上、外表不同的另一个积分。有时新的被积函数（integrand）可以直接积分；有时它是原被积函数的“搭档”，把两者相加（或互相比较）便能替我们完成工作。

解答

第 (i) 部分

设 $x = 1/t$，则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$。由于 $a > 0$，$[a, b]$ 中每个 x 都是正数，对应的 t 亦然。于是

$$1 + x^2 = \frac{t^2 + 1}{t^2} \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)^{3/2} = \frac{(1 + t^2)^{3/2}}{t^3},$$

这里用到了 $\sqrt{t^2} = t$，因为 $t > 0$。积分限 $x = a$ 和 $x = b$ 变成 $t = a^{-1}$ 和 $t = b^{-1}$。因此

$$\int_a^b \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{t^3}{(1 + t^2)^{3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{-t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t,$$

得证。

第 (ii) 部分

(a) 取 $a = \frac{1}{2}$、$b = 2$，新的积分限是 2 和 $\frac{1}{2}$。把上下限对调便可吸收负号：

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

新的被积函数是 $1+t^2$ 某个幂的导数（derivative）（的倍数）：由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t^2)^{-1/2} = -t(1+t^2)^{-3/2}$，

$$\int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-(1+t^2)^{-1/2}\Big]_{1/2}^{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5/4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) 被积函数是偶函数（even function），所以在 $[-2,2]$ 上的积分是在 $[0,2]$ 上积分的两倍。把后者拆成 $[0,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},2]$；第二段就是 (a) 部分。

> **想一想** 第 (i) 部分要求 $a>0$。从 0 开始的那一段该怎样处理?

先在 $[a,\frac{1}{2}]$ 上处理，其中 $0<a<\frac{1}{2}$，这时第 (i) 部分适用；然后令 $a\to 0^+$。在第 (i) 部分取 $b=\frac{1}{2}$，得

$$\int_{a}^{1/2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{1/a} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}}}.$$

当 $a\to 0^+$ 时，$a^{-2}\to\infty$，最后一项趋于 0。左边趋于在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上的积分，因为被积函数在该处连续。所以这一段同样等于 $\frac{1}{\sqrt{5}}$，从而

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

第 (iii) 部分

(a) 记 $J=\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$，再次使用 $x=1/t$。此时 $(1+x^2)^2 = (1+t^2)^2/t^4$，所以

$$J = \int_{2}^{1/2} \frac{t^4}{(1+t^2)^2}\cdot\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

把哑变量（dummy variable）t 改名为 x 后，这就是第一个等式。把这第二个积分记作 K，于是 $J=K$。把两个被积函数相加，

$$J+K = \int_{1/2}^{2} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

由于 $J=K$，得 $J=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$，等式链便完成了。

因此

$$J = \tfrac{1}{2}(\arctan 2 - \arctan\tfrac{1}{2}).$$

这个结果可用以下两种方法之一化简。由于 $\arctan 2+\arctan\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$（两直角边为 1 和 2 的直角三角形中的两个余角（complementary angles））），得 $J=\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{2}$。又或者，

用 tan 的减法公式，$\tan(\arctan 2 - \arctan\frac{1}{2}) = \dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$，而这个差位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，所以

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{3}{4} \approx 0.3218.$$

(b) 设 L 为所求的积分。在动用难求的原函数(antiderivative)之前,不妨再试一次 $x = 1/t$。被积函数变成

$$\frac{1-\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = \frac{\frac{t-1}{t}}{\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}} = \frac{t(t-1)}{\sqrt{1+t^2}},$$

这里再次用到 $t > 0$。乘以 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$，并注意积分限由 2 到 $\frac{1}{2}$，

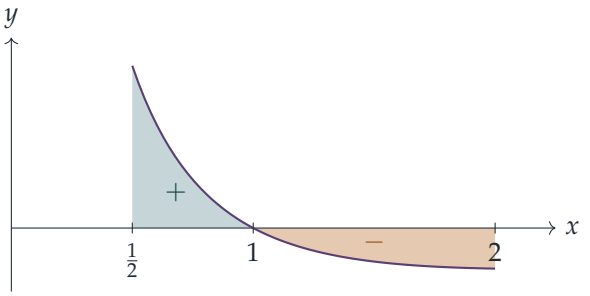
$$L = \int_{2}^{1/2} \frac{-(t-1)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t-1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{1/2}^{2} \frac{1-t}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -L.$$

? **想一想** 代换把 L 变成了 $-L$。这是矛盾吗?

不是：它正好告诉我们积分的值。由 $L = -L$ 得 $2L = 0$，所以

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1-x}{x(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

图像也吻合：$[\frac{1}{2}, 1]$ 上的正面积恰好抵消 $[1, 2]$ 上的负面积，因为 $x \mapsto 1/x$ 把这两段互换，而且由上面的推导可知，它把其中一段的面积变成另一段面积的相反数。



验算

- $(1+x^2)^{-3/2}$ 的一个原函数是 $x(1+x^2)^{-1/2}$（求导即可验证）。用它计算，(ii)(a) 得 $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472$，(ii)(b) 得 $\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1.7889$，与我们的答案一致。
- 在 (iii)(a) 中，$\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4} \approx 0.32175$ 与 $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2} \approx 0.32175$ 相符。对等式链中三个积分进行数值积分（numerical quadrature），都得到相同的值。
- 在 (iii)(b) 中，被积函数在 $x < 1$ 时为正，在 $x > 1$ 时为负，所以答案为零是合理的。数值积分在舍入误差范围内得到 0。

常见错误

- 漏掉 $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ 中的负号，或忘记对调积分上下限会把它抵消。
- 在 (ii)(b) 中直接以 $a = 0$ 套用第 (i) 部分，这需要积分限 $t = 1/0$。应该取极限，或者干脆用原函数。
- 写 $\sqrt{(1+t^2)/t^2} = \sqrt{1+t^2}/t$ 时没有指出这需要 $t > 0$。

STEP 之外

映射 $x \mapsto 1/x$ 是区间 $[\frac{1}{2}, 2]$ 的一种对称性（symmetry），而利用积分的对称性是一个反复出现的技巧，例如藉 $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ 计算 $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \,\mathrm{d}x$。第 (ii)(b) 部分让你初尝瑕积分（improper integral）：代换把一个有限的端点送到无穷远，我们必须小心地取极限。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）严谨地处理积分的极限，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）则有更多 STEP 风格的积分练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。