详细解答

STEP III 2022，第 9 题

力学 · 碰撞与恢复系数

> **STEP III 2022，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

这里每一次碰撞其实都是同一种碰撞：一个运动中的质点撞向一个静止、质量为其 k 倍的质点。因此第 (i) 部分开头求出的因子 α 和 β 可以在第 (ii) 部分重用，因为在那里 B（质量 km）撞向 C（质量 k^2m）。之后，每个“在同一点相遇”的条件，都只不过是把同一时刻的两个表达式设为相等。在第 (ii) 部分我们会得到两条关于 k 和 e 的方程，而其中一条原来正正就是第 (i) 部分的条件。

解答

我们把 A、B、C 视为在光滑表面上沿同一直线运动的质点，而碰撞是瞬时的。所有速度均以 A 初始运动的方向为正方向。

第 (i) 部分

第一次碰撞。动量（momentum）守恒，而牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）指出分离速率等于接近速率的 e 倍：

$$mu = mv_1 + kmv_2, \qquad v_2 - v_1 = eu.$$

把 $v_1 = v_2 - eu$ 代入第一条方程，得 $u = v_2 - eu + kv_2$，因此

$$v_2 = \frac{1+e}{k+1}u = \beta u, \qquad v_1 = \frac{1+e}{k+1}u - eu = \frac{1+e-ek-e}{k+1}u = \frac{1-ke}{k+1}u = \alpha u,$$

即为所求。

第二次碰撞。由第一次碰撞起计时。B 用时 $D/(\beta u)$ 走完到墙壁的距离 D。它以速率 $e\beta u$ 反弹，所以再用时 $D/(2e\beta u)$ 往碰撞点方向走回 $\frac{1}{2}D$。若第二次碰撞在那里发生，则发生

时刻为

$$T = \frac{D}{\beta u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{(2e+1)D}{2e\beta u}.$$

该点距离墙壁 $\frac{1}{2}D$，因此它同时位于第一次碰撞点之后 $\frac{1}{2}D$ 处。A 以恒定速度 αu 运动，所以必须有 $\alpha > 0$ 及 $\alpha u T = \frac{1}{2}D$：

$$\alpha \frac{(2e+1)D}{2e\beta} = \frac{D}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(2e+1) = e\beta.$$

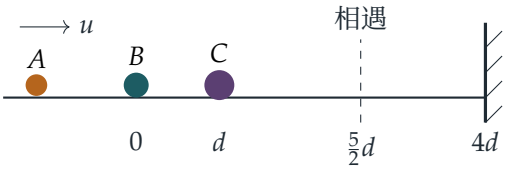
两边乘以 $k+1$，得 $(1-ke)(2e+1) = e(1+e)$，因此

$$ke(2e+1) = (2e+1) - e - e^2 = 1 + e - e^2 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)},$$

这就是所求的结果。这个值确实给出 $\alpha > 0$：它使 $ke = \frac{1+e-e^2}{2e+1}$，而由于当 $e > 0$ 时 $1 + e - e^2 < 1 + 2e$，此值小于 1。

第 (ii) 部分

把原点设在 B 的起点，使 C 从 $x = d$ 出发，而墙壁位于 $x = 4d$。所要求的相遇点距离墙壁 $\frac{3}{2}d$，即位于 $x = \frac{5}{2}d$。



设 A 撞上 B 的一刻为 $t = 0$。这次碰撞与第 (i) 部分的完全相同，所以碰撞后 A 的速度为 αu，B 的速度为 βu，其中 α 和 β 与之前相同。

想一想 B 撞上 C 时会发生甚么？我们需要重做碰撞的代数运算吗？

不需要。C 静止，而它的质量 $k^2 m$ 是 B 的质量 km 的 k 倍。所以这又是第 (i) 部分的碰撞，质量比同样是 k，e 相同，只是入射速率由 u 变成 βu。B 在时刻 $t_1 = d/(\beta u)$ 撞上 C。碰撞后 B 的速度为 $\alpha\beta u$，C 的速度为 $\beta^2 u$。

现在我们计算每个质点何时到达 $x = \frac{5}{2}d$，并假设在此之前没有其他碰撞发生（我们会在最后验证这一点）。

- A 从 $x = 0$ 以 αu 运动，所以在 $t = \dfrac{5d}{2\alpha u}$ 到达。
- B 在 t_1 到达 $x = d$，然后以速率 $\alpha\beta u$ 走 $\frac{3}{2}d$。它在 $t = \dfrac{d}{\beta u} + \dfrac{3d}{2\alpha\beta u}$ 到达。

► C 以 $\beta^2 u$ 走 $3d$ 到墙壁，再以 $e\beta^2 u$ 往回走 $\frac{3}{2}d$。它到达的时刻为

$$t = \frac{d}{\beta u} + \frac{3d}{\beta^2 u}\left(1 + \frac{1}{2e}\right) = \frac{d}{\beta u} + \frac{3(2e+1)d}{2e\beta^2 u}.$$

要发生同时碰撞，三个时刻必须相等。

B 与 C。消去公共项 $d/(\beta u)$，再乘以 $2\beta^2 u/(3d)$：

$$\frac{1}{\alpha}\beta = \frac{2e+1}{e} \quad \Longleftrightarrow \quad e\beta = \alpha(2e+1).$$

这正正是第 (i) 部分的条件，所以

$$k = \frac{1 + e - e^2}{e(2e+1)}. \tag{1}$$

（这并非巧合。在两种情况下，都是一个质点离开碰撞后，以入射速率的 β 倍走 D 到墙壁，再折返 $\frac{1}{2}D$；与此同时，另一个质点以入射速率的 α 倍向前走 $\frac{1}{2}D$。这里 $D = 3d$，而入射速率为 βu。）

A 与 B。把 $\dfrac{5}{2\alpha} = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{3}{2\alpha\beta}$ 乘以 $2\alpha\beta$，得 $5\beta = 2\alpha + 3$。再乘以 $k+1$：

$$5(1+e) = 2(1-ke) + 3(k+1) \quad \Longrightarrow \quad 5e = k(3-2e) \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{5e}{3-2e}. \tag{2}$$

? **想一想** 我们有两个 k 的表达式。怎样求出 e?

令 (1) 与 (2) 相等。由于 $0 < e < 1$，两个分母都是正数，所以可以交叉相乘：

$$\begin{aligned} 5e^2(2e+1) &= (3-2e)(1+e-e^2) \\ 10e^3 + 5e^2 &= 3 + e - 5e^2 + 2e^3 \\ 0 &= 8e^3 + 10e^2 - e - 3. \end{aligned}$$

试代 $e = \frac{1}{2}$，得 $1 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} - 3 = 0$，所以 $2e-1$ 是一个因式：

$$8e^3 + 10e^2 - e - 3 = (2e-1)(4e^2 + 7e + 3) = (2e-1)(4e+3)(e+1).$$

其余的根 $-\frac{3}{4}$ 和 -1 都是负数，所以满足 $0 < e < 1$ 的唯一根是 $e = \frac{1}{2}$，即为所求。于是 $k = \frac{5}{4}$。

验证情境是否自洽。当 $e = \frac{1}{2}$、$k = \frac{5}{4}$ 时，得 $\alpha = \frac{1}{6}$ 及 $\beta = \frac{2}{3}$。在 B 撞上 C 之前，A（速率 $\frac{1}{6}u$）比 B（速率 $\frac{2}{3}u$）慢，所以不能提早追上 B。之后，B（速率 $\frac{1}{9}u$）比 C（速率 $\frac{4}{9}u$）慢，所以 B 不能在 C 到达墙壁前追上 C。这时 B 比 A 慢，所以 A 逐渐追近 B，而它们只在我们算出的那一点相遇。因此不会有额外的碰撞，三个质点都在 $t = 15d/u$ 时到达 $x = \frac{5}{2}d$。

验算

- 在第 (i) 部分，$v_1 + kv_2 = u$（动量）及 $v_2 - v_1 = eu$（恢复系数）。若 $e = 1$ 且 $k = 1$，则 $\alpha = 0$ 及 $\beta = 1$：在完全弹性碰撞中，质量相等的两个质点互换速度，理应如此。
- 在第 (ii) 部分，取 $u = d = 1$ 及上述数值，三个到达时刻分别为：A 是 $\frac{5/2}{1/6} = 15$，B 是 $\frac{1}{2/3} + \frac{3/2}{1/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 15$，$C$ 是 $\frac{3}{2} + \frac{3}{4/9} + \frac{3/2}{2/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = 15$。
- 公式 (1) 在 $e = \frac{1}{2}$ 时给出 $k = \frac{5/4}{1} = \frac{5}{4}$，与 (2) 一致：$\frac{5/2}{2} = \frac{5}{4}$。

常见错误

- 在第 (i) 部分，应该由碰撞点量度相遇点，却由墙壁量度。在这里两者恰巧相同，都是 $\frac{1}{2}D$；但在第 (ii) 部分，距离墙壁 $\frac{3}{2}d$ 的相遇点，距离 B 的起点是 $\frac{5}{2}d$。
- 从头重做 B–C 的碰撞而漏了一个因子。留意到质量比再次是 k，便可省去这些功夫。
- 忘记 C 从墙壁反弹后的速率是 $e\beta^2 u$，而不是 $\beta^2 u$。

STEP 之外

这道题之所以行得通，是因为问题具有*自相似性*（self-similar）：把质量乘以 k、速率乘以 β，就把一次碰撞变成下一次碰撞，所以同一套代数运算会重复出现。同样的想法也出现在质量按几何级数递减的一串球之中——这样的球串能非常有效地把能量传递下去；它亦是著名的“用碰撞方块数出 π”问题背后的道理，而该问题在速度空间中、以动量和能量作为约束来分析最为简洁。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）有系统地处理碰撞问题，包括在质心参考系（centre-of-mass frame）中进行分析，这使得像 α 和 β 这样的公式一目了然。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。