详细解答

STEP III 2022，第 8 题

纯数学 · 棣美弗定理与无理性

STEP III 2022，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 5.5 节名不副实的有理角中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/rational-angles.html

关键思路

把 $\cos\theta$ 提出后套用棣美弗定理（De Moivre's theorem），可将 $\sin k\theta$ 和 $\cos k\theta$ 表示为 $\cos^k\theta$（或 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$）乘以一个关于 $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ 的多项式（polynomial）。当 $\sec^2\theta - 1$ 是偶整数时，该多项式的值是一个整数，而它的奇偶性（parity）可以从首项直接读出。若角度（以度为单位）是有理数（rational），某个 $\sin k\theta$ 便会等于零，而奇偶性论证说明这种情况永远不会发生。

解答

第 (i) 部分

假设 $\cos\theta \neq 0$，使 $\sec\theta$ 存在。由棣美弗定理，

$$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1+\mathrm{i}t)^k, \qquad t = \tan\theta.$$

按二项式展开（binomial expansion），$(1+\mathrm{i}t)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{i}^j t^j$。$j$ 为奇数的项是虚数，且 $\mathrm{i}^{2r+1} = (-1)^r\mathrm{i}$；$j$ 为偶数的项是实数，且 $\mathrm{i}^{2r} = (-1)^r$。取虚部（imaginary part），

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta\left(\binom{k}{1}t - \binom{k}{3}t^3 + \binom{k}{5}t^5 - \cdots\right)\\ &= \cos^k\theta\,\tan\theta\left(k - \binom{k}{3}t^2 + \binom{k}{5}t^4 - \cdots\right).\end{aligned}$$

由于 $\cos^k\theta\tan\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta$ 及 $t^2 = \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$，上式即为

$$\sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{5}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right),$$

此即所求。括号会自然终止，因为当 $j > k$ 时 $\binom{k}{j} = 0$。同样地取实部，

$$\cos k\theta = \cos^k\theta\left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

第 (ii) 部分

此处 $\cos\theta = 1/a$ 且 $a \geq 3$，故 $0° < \theta < 90°$。特别地，$\sin\theta \neq 0$ 且 $\cos\theta \neq 0$。此外 $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$，由于 a 是奇数，这是一个 偶整数。记 $X = a^2 - 1$。

假设 k 是使 $\sin k\theta = 0$ 的最小正整数。那么 $k \neq 1$，因为 $\sin\theta \neq 0$，所以 $k > 1$，可应用第 (i) 部分：

$$0 = \sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots\right).$$

因子 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$ 不为零，所以括号等于零。首项以外的每一项都至少含有一个偶整数 X 的因子，而二项式系数（binomial coefficient）都是整数，所以

$$0 = k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots \equiv k \pmod 2.$$

因此 k 是偶数。于是

$$0 = \sin k\theta = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right).$$

但 $\frac{1}{2}k$ 是整数且 $0 < \frac{1}{2}k < k$，所以由 k 的最小性（minimality），$\sin(\frac{1}{2}k\theta) \neq 0$。因此 $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$，此即所求。

想一想 “θ 是有理数”这个假设在哪里用上?

正是它令 k 得以存在。设 $\theta = p/q$，其中 p、q 为正整数（记住 θ 以度为单位）。那么 $180q\,\theta = 180p$，故 $\sin(180q\,\theta) = 0$。所以确实存在正整数 m 使 $\sin m\theta = 0$，因此也存在最小的一个，记为 k。它满足上述假设，所以 k 是偶数；记 $n = \frac{1}{2}k$，便有 $\cos n\theta = 0$。

现在证明 $\cos n\theta$ 不可能为零。若 $n = 1$，则 $\cos n\theta = 1/a \neq 0$。若 $n > 1$，第 (i) 部分的余弦公式给出

$$\cos n\theta = \frac{1}{a^n}\left(1 - \binom{n}{2}X + \binom{n}{4}X^2 - \cdots\right).$$

同样, 首项以外的每一项都是偶数, 所以括号是一个奇整数, 特别地不为零。故 $\cos n\theta \neq 0$, 矛盾。因此 θ 是无理数（irrational）。

第 (iii) 部分

现在 $\cot\phi = 1/b$，所以 $\tan\phi = b$，其中 $b \geq 2$，且 $0° < \phi < 90°$。同样 $\sin\phi \neq 0$ 且 $\cos\phi \neq 0$，而这次

$$\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2,$$

由于 b 是偶数，这是一个偶整数。所以只要以 $X = b^2$ 代替 $a^2 - 1$，第 (ii) 部分的论证便完全适用。完整写出如下：

设 $\phi = p/q$，其中 p、q 为正整数。那么 $\sin(180q\,\phi) = 0$，所以存在最小的正整数 k 使 $\sin k\phi = 0$，而由于 $\sin\phi \neq 0$，$k > 1$。由第 (i) 部分，因为 $\sin\phi\cos^{k-1}\phi \neq 0$，

$$0 = k - \binom{k}{3}b^2 + \binom{k}{5}b^4 - \cdots \equiv k \pmod 2,$$

所以 k 是偶数。于是 $0 = \sin k\phi = 2\sin(\tfrac{1}{2}k\phi)\cos(\tfrac{1}{2}k\phi)$，而由最小性，$\sin(\tfrac{1}{2}k\phi) \neq 0$，所以 $\cos n\phi = 0$，其中 $n = \tfrac{1}{2}k$。若 $n = 1$，这表示 $\cos\phi = 0$，但这是错的。若 $n > 1$，

$$\cos n\phi = \cos^n\phi\left(1 - \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{4}b^4 - \cdots\right),$$

其中 $\cos^n\phi \neq 0$，而括号是奇数，故不为零。这个矛盾说明 ϕ 是无理数。

验算

- 在第 (i) 部分代入 $k = 2$ 及 $k = 3$：公式给出 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$、$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ 及 $\sin 3\theta = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$。对于不超过 15 的 k，两条公式在随机角度下也与直接计算的结果吻合。
- 奇偶条件是必要的。取 $a = 2$（偶数）得 $\theta = 60°$，取 $b = 1$（奇数）得 $\phi = 45°$，两者都是有理数。在这两种情况下，$X = 3$ 或 1 都是奇数，所以论证恰好在应该失效的地方失效。
- 当 $a = 3$ 时 $\theta \approx 70.5288°$，当 $b = 2$ 时 $\phi \approx 63.4349°$。电脑验算确认，对于所有小于 30 的奇数 a 及偶数 b，以及每个 $k < 2000$，$\sin k\theta$ 和 $\sin k\phi$ 都与零保持相当距离。

常见错误

- 在约去 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$ 之前，没有说明为何它 $\neq 0$。
- 没有解释 k 从何而来：最小的 k 之所以存在，只是因为有理数 θ 令 $\sin(180q\,\theta) = 0$。
- 没有利用 k 的最小性排除 $\sin(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$，便断定 $\cos(\tfrac{1}{2}k\theta) = 0$。

STEP 之外

撇除前面的因子，这里的括号就是*切比雪夫多项式*（Chebyshev polynomials），而奇偶性技巧则是把整数恒等式模一个质数（reducing modulo a prime）来处理的初步体验。一个著名的相关结果是 *Niven 定理*（Niven's theorem）：在 180° 的有理数倍 θ 之中，使 $\cos\theta$ 为有理数的只有满足 $\cos\theta \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ 的那些。其证明方法是证明 $2\cos\theta$ 是一个代数整数（algebraic integer）。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是建立这类论证背后的数论基础的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。