详细解答

STEP III 2022，第 7 题

纯数学 · 向量积变换

STEP III 2022，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 7.5 节三维空间中的旋转中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/rotations-3d.html

关键思路

一切都建基于把一个向量（vector）分解为沿 $\mathbf{n}$ 的部分和垂直（perpendicular）于 $\mathbf{n}$ 的部分。映射（map）$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ 会消去平行部分，并把垂直部分绕 $\mathbf{n}$ 转过一个直角，而不改变其长度。第 (i) 部分一旦证明了连续施行这个映射两次会得到垂直部分的负值，第 (ii) 和 (iii) 部分的映射便可以逐一观察它们分别对这两个部分的作用而直接读出。

解答

第 (i) 部分

设 $\mathbf{n} = (a,b,c)^{\mathsf{T}}$ 及 $\mathbf{r} = (x,y,z)^{\mathsf{T}}$，则

$$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}.$$

再施行 f 一次，$\mathbf{n} \times \mathrm{f}(\mathbf{r})$ 的 x 分量（component）等于 b 乘以 $\mathrm{f}(\mathbf{r})$ 的第三个分量，减去 c 乘以第二个分量：

$$\begin{aligned} b(ay - bx) - c(cx - az) &= aby - b^2x - c^2x + acz \\ &= -x(b^2 + c^2) + aby + acz, \end{aligned}$$

此即所求。由于 $\mathbf{n}$ 是单位向量（unit vector），$b^2+c^2=1-a^2$，所以上式变成

$$-x+a^2x+aby+acz=a(ax+by+cz)-x=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\,a-x.$$

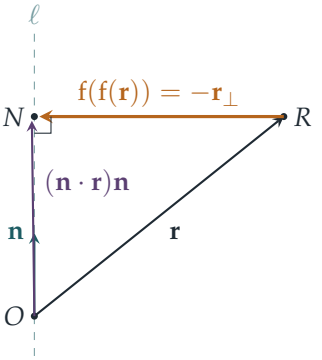
这正是 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}$ 的 x 分量。由于叉积（cross product）在这种循环重新标记下保持不变，只要循环替换 $a\to b\to c\to a$ 及 $x\to y\to z\to x$，便可同样得出 y 分量和 z 分量。因此

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}.$$

几何意义。写 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\parallel}+\mathbf{r}_{\perp}$，其中 $\mathbf{r}_{\parallel}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ 是沿 $\mathbf{n}$ 的分量，而 $\mathbf{r}_{\perp}=\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ 垂直于 $\mathbf{n}$。于是

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}_{\perp}.$$

设 ℓ 为通过 O 而方向为 $\mathbf{n}$ 的直线，并设 N 为由 R 到 ℓ 的垂足（foot of the perpendicular），故 $\overrightarrow{ON}=\mathbf{r}_{\parallel}$。于是 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{RN}$：它是由 R 垂直地直指轴 ℓ 的向量，其长度就是 R 与 ℓ 的距离。



第 (ii) 部分

轴。由于 $\mathbf{n}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$，我们有 $\mathrm{f}(\mathbf{n})=\mathbf{0}$，因而 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{n}))=\mathbf{0}$，得 $\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$。由线性（linearity）得 $\mathrm{g}(\lambda\mathbf{n})=\lambda\mathbf{n}$，所以直线 ℓ 上每一点都是不动点（fixed point）。

垂直向量。现在取满足 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 的 $\mathbf{r}$。由第 (i) 部分，$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}$，所以

$$\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})-(1-\cos\theta)\mathbf{r}=\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r}).$$

? **想一想** 当 $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$ 时，$\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 是怎样的?

它同时垂直于 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{r}$，所以它位于通过 O 且垂直于 $\mathbf{n}$ 的平面上，并与 $\mathbf{r}$ 成直角。它的长度是 $|\mathbf{n}||\mathbf{r}|\sin 90^\circ=|\mathbf{r}|$。因此 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 是该平面上两个互相垂直、长度相等的向量，而 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}$ 就是把 $\mathbf{r}$ 绕 $\mathbf{n}$ 按右手方向（right-handed sense）转过 90° 的结果（即从 $\mathbf{n}$ 的末端回望 O

时的逆时针方向)。正如 $\cos\theta\,\mathbf{i}+\sin\theta\,\mathbf{j}$ 是把 $\mathbf{i}$ 朝 $\mathbf{j}$ 旋转 θ 所得，向量 $\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})$ 就是把 $\mathbf{r}$ 绕 $\mathbf{n}$ 按同一方向旋转 θ 所得。

一般向量。f 是线性的（叉积对第二个自变量是线性的），所以 g 也是线性的。把一般的 $\mathbf{r}$ 写成 $\mathbf{r}_{\parallel}+\mathbf{r}_{\perp}$，g 保持 $\mathbf{r}_{\parallel}$ 不变，并把 $\mathbf{r}_{\perp}$ 绕 $\mathbf{n}$ 旋转 θ，这正是绕 ℓ 的旋转所做的事。

因此 $R\mapsto P$ 是一个**绕通过 O、方向为 $\mathbf{n}$ 的直线旋转 θ 角的旋转（rotation）**，方向为绕 $\mathbf{n}$ 的右手方向（即从 $\mathbf{n}$ 的末端望向 O 时的逆时针方向）。

第 (iii) 部分

利用第 (i) 部分，

$$\mathrm{h}(\mathbf{r})=-\mathbf{r}-2\big((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}\big)=\mathbf{r}-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}.$$

以两个分量表示，$\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}_{\perp}-\mathbf{r}_{\parallel}$：

- $\mathrm{h}(\mathbf{n})=\mathbf{n}-2\mathbf{n}=-\mathbf{n}$，所以沿 $\mathbf{n}$ 的分量被反转；
- 若 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$，则 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$，所以平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 上每一点都是不动点。

从几何上看，$\overrightarrow{RQ}=-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ 垂直于平面 $\Pi:\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$，而 RQ 的中点的位置向量（position vector）是 $\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$，它位于 Π 上。所以 Q 是 R 的镜像：映射 $R\mapsto Q$ 是**对通过 O 且垂直于 $\mathbf{n}$ 的平面的反射（reflection）**。

验算

- 取 $\mathbf{n}=\mathbf{k}=(0,0,1)^{\mathsf{T}}$。则 $\mathbf{n}\times\mathbf{r}=(-y,x,0)^{\mathsf{T}}$，施行两次得 $(-x,-y,0)^{\mathsf{T}}$，与 $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}=(0,0,z)^{\mathsf{T}}-(x,y,z)^{\mathsf{T}}$ 吻合。于是 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=(x\cos\theta-y\sin\theta,\ x\sin\theta+y\cos\theta,\ z)^{\mathsf{T}}$，正是我们熟悉的绕 z 轴的旋转；而 $\mathrm{h}(\mathbf{r})=(x,y,-z)^{\mathsf{T}}$，是对平面 $z=0$ 的反射。
- $\theta=0$ 给出 $\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}$，而施行 h 两次得到恒等映射（identity），这正符合“转零角度的旋转”和反射应有的性质。
- 以 2000 组随机的单位向量 $\mathbf{n}$、向量 $\mathbf{r}$ 和角 θ 进行电脑验算，证实了 x 分量的公式、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ 的恒等式、g 与绕 $\mathbf{n}$ 按右手方向旋转 θ 一致，以及 h 与对平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ 的反射一致。

常见错误

- 忘记使用 $a^2+b^2+c^2=1$：若 $\mathbf{n}$ 不是单位向量，(i) 中的恒等式并不成立。
- 在 (ii) 中只验证了 $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$ 的情况，却没有解释为何这一点连同 $\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$ 及线性，便足以处理所有 $\mathbf{r}$。

▶ 把 (iii) 说成是对直线 ℓ 的反射：ℓ 上的点是被反转，而不是保持不动；保持不动的是垂直于 $\mathbf{n}$ 的平面。

STEP 之外

(ii) 中的公式就是 Rodrigues 旋转公式（Rodrigues′ rotation formula），而 f 的矩阵是反对称（antisymmetric）的“叉积矩阵” K，所以旋转可写成 $I + \sin\theta\, K + (1 - \cos\theta)K^2$，这也等于 $\exp(\theta K)$。(iii) 中的映射是 Householder 反射 $I - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$，是数值线性代数（numerical linear algebra）中的重要工具。在大学一年级的课程中，它们分别以行列式（determinant）为 $+1$ 和 -1 的正交矩阵（orthogonal matrix）的身份出现。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）是认识它们的好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。