详细解答

STEP III 2022，第 6 题

纯数学 · 滚动圆与切线

STEP III 2022，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分是一个二阶泰勒展开（Taylor expansion），而它真正的重点在最后一行的提醒：当一阶项消失时，比值由二阶项决定。在第 (ii) 部分中，滚动条件表明两个圆经过接触点的弧长相等，由此可知 C_1 转了多少。在 (c) 的特殊点上，弦（chord）中的一阶项恰好互相抵消，所以我们需要用到 (i) 中的二阶项。

解答

第 (i) 部分

当 α 很小时，$\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ 及 $\sin\alpha \approx \alpha$，误差的阶为 α^3。因此

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha - \cos\theta \\ &\approx \cos\theta(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2) - \alpha\sin\theta - \cos\theta = -\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta,\end{aligned}$$

此即所求。同理，

$$\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta \approx \alpha\cos\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta.$$

把 $(*)$ 的分子和分母同除以 α，

$$\frac{\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta}{\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta} \approx \frac{\cos\theta - \frac{1}{2}\alpha\sin\theta}{-\sin\theta - \frac{1}{2}\alpha\cos\theta} \longrightarrow -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta,$$

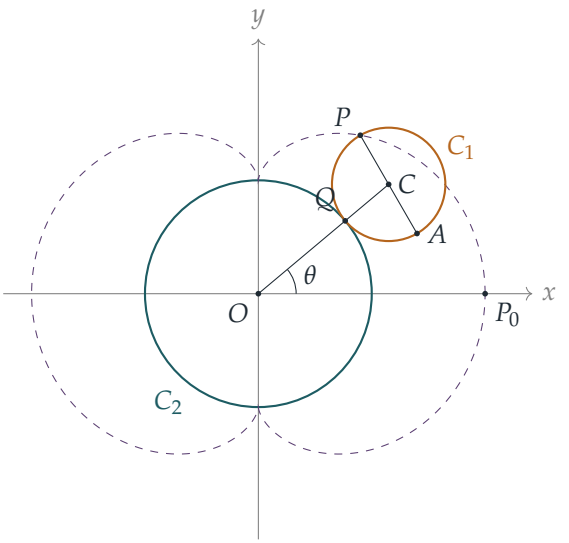
这个极限（limit）没有问题，因为分母趋向 $-\sin\theta \neq 0$。

若 $\sin\theta = 0$，则 $\cos\theta = \pm 1$，分母的一阶项便消失：

$$(*) \approx \frac{\alpha\cos\theta}{-\frac{1}{2}\alpha^2\cos\theta} = -\frac{2}{\alpha}.$$

所以 $(*)$ 没有有限的极限：它的大小无界地增长，当 $\alpha \to 0^+$ 时趋向 $-\infty$，当 $\alpha \to 0^-$ 时趋向 $+\infty$。（从几何上看，单位圆上由角 θ 到 $\theta+\alpha$ 的弦变成铅垂，其斜率（gradient）趋向无限大。）

第 (ii)(a) 部分



图中所示为 $n=3$ 的情况，虚线曲线是 P 的轨迹。设 C 为 C_1 的圆心。由于两圆在 Q 相切，点 O、Q、C 共线（collinear），且 $OC=(n-1)a+a=na$，所以

$$\overrightarrow{OC}=na(\cos\theta,\sin\theta),$$

而从 C 看，点 Q 位于方向 $\theta+\pi$。

设 A 为 C_1 上与 P 直径相对（diametrically opposite）的点；这就是开始时与 C_2 相接触的 C_1 上的点，位于 $((n-1)a,0)$。无滑动滚动（rolling without slipping）表示 C_1 上由 A 到 Q 的弧长，等于接触点在 C_2 上走过的弧长，即 $(n-1)a\theta$。由于 C_1 的半径为 a，角 ACQ 等于 $(n-1)\theta$。

? **想一想** 从 C 看，A 位于 Q 的顺时针方向还是逆时针方向?

当 C_1 沿 C_2 外侧逆时针滚动时，C_1 本身也逆时针自转，所以它已经滚过的点会被逆时针带离接触点。因此 $\overrightarrow{CA}$ 指向方向 $\theta+\pi+(n-1)\theta=n\theta+\pi$，而 $\overrightarrow{CP}=-\overrightarrow{CA}$ 指向方向 $n\theta$。（验证：当 $\theta=0$ 时，这给出 $P=((n+1)a,0)$。C_1 总共转了 $n\theta$，这就是一枚硬币绕另一枚硬币滚动时那个熟悉的“多转一圈”。）因此

$$\overrightarrow{OP}=na(\cos\theta,\sin\theta)+a(\cos n\theta,\sin n\theta),$$

所以 $x(\theta) = a(n\cos\theta + \cos n\theta)$，此即所求，而且

$$y(\theta) = a(n\sin\theta + \sin n\theta).$$

第 (ii)(b) 部分

把两式平方后相加，

$$OP^2 = a^2(n^2 + 1 + 2n(\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta)) = a^2(n^2 + 1 + 2n\cos(n-1)\theta).$$

令它等于 $(n-1)^2a^2 = (n^2 - 2n + 1)a^2$，得 $2n\cos(n-1)\theta = -2n$，即 $\cos(n-1)\theta = -1$。所以

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-1}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

在绕 C_2 的每一圈中给出 $n-1$ 个不同的位置。这些正是 P 本身成为接触点的时刻：曲线的尖点（cusp）。

第 (ii)(c) 部分

设 $\theta_0 = \pi/(n-1)$，则 $n\theta_0 = \theta_0 + \pi$，所以

$$\cos n\theta_0 = -\cos\theta_0, \qquad \sin n\theta_0 = -\sin\theta_0.$$

对每一项应用第 (i) 部分，其中 $n\theta$ 项以 $n\alpha$ 作为微小增量：

$$\begin{aligned}
\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{a} &\approx n(\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta_0) \\
&\quad + (n\alpha\cos n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin n\theta_0) \\
&= n\alpha\cos\theta_0 - \tfrac{1}{2}n\alpha^2\sin\theta_0 - n\alpha\cos\theta_0 + \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin\theta_0 \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\sin\theta_0, \\
\frac{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)}{a} &\approx n(-\alpha\sin\theta_0 - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta_0) \\
&\quad + (-n\alpha\sin n\theta_0 - \tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\cos n\theta_0) \\
&= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\cos\theta_0,
\end{aligned}$$

两者的误差都是 α^3 阶。一阶项恰好互相抵消，正如 (i) 中 $\sin\theta = 0$ 的情况，所以答案由二阶项决定。把分子和分母同除以 $\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2$，

$$\frac{y(\theta_0+\alpha) - y(\theta_0)}{x(\theta_0+\alpha) - x(\theta_0)} = \frac{\sin\theta_0 + O(\alpha)}{\cos\theta_0 + O(\alpha)} \longrightarrow \tan\theta_0,$$

前提是 $\cos\theta_0 \neq 0$，而这在 $n \geq 4$ 时成立。当 $n = 3$ 时，$\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$；同样的推导显示倒数比值趋向 $\cot\theta_0 = 0$，所以弦变成铅垂。

这个极限就是 θ_0 处切线（tangent）的斜率，因为它是弦斜率的极限。而

$$x(\theta_0) = a(n\cos\theta_0 - \cos\theta_0) = (n-1)a\cos\theta_0, \qquad y(\theta_0) = (n-1)a\sin\theta_0,$$

所以 OP 与 x 轴成角 θ_0，斜率为 $\tan\theta_0$（当 $n = 3$ 时为铅垂）。切线与 OP 方向相同，所以 $(x(\theta_0), y(\theta_0))$ 处的切线平行于 OP。事实上，由于切线经过 P，它就落在直线 OP 上。

验算

- 当 $\theta = 0$、$\alpha = 0.001$ 时，比值 $(*)$ 为 -1999.9998，对比 $-2/\alpha = -2000$。
- 当 $n = 5$、$\theta_0 = \frac{1}{4}\pi$ 及 $\alpha = 10^{-4}$ 时，弦的斜率为 1.0004，接近 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$。
- 在 θ_0 处，$OP = (n-1)a$，所以 (c) 中的点就是 (b) 中求得的 $k = 0$ 尖点。这就是该处切线沿径向的原因。

常见错误

- 把 C_1 的转角当作 $(n-1)\theta$（滚过的弧），忘记了 C 绕 O 运行所带来的额外 θ。
- 在 (c) 中只用一阶近似：这只会得到 $0/0$，甚么也说明不了。
- 忘记 $n = 3$ 时 $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$，此时 $\tan\theta_0$ 没有定义。

STEP 之外

这条曲线是一条有 $n-1$ 个尖点的外摆线（epicycloid）。在每个尖点处，速度（velocity）$(x'(\theta), y'(\theta))$ 为零，所以一般的公式 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y'/x'$ 不再适用。第 (c) 部分通过推到二阶来处理这个问题，这其实就是乔装了的洛必达法则（l'Hôpital's rule）。参数化曲线（parametrised curve）上速度为零的点称为奇点（singular points），它们是曲线微分几何（differential geometry）入门课程的研究对象。关于第 (i) 部分背后的极限与泰勒近似，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。