详细解答

STEP III 2022，第 5 题

纯数学 · 对称定积分

STEP III 2022，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

在对称区间（symmetric interval）$[-a, a]$ 上，代换（substitution）$x \mapsto -x$ 让我们可以把积分“折叠”到 $[0, a]$ 上，把 x 处的值与 $-x$ 处的值配成一对。对于形如 $1/(1+\text{某式})$ 的被积函数（integrand），这一对 $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q}$ 恰好在 $pq = 1$ 时化简为 1，而 $\mathrm{e}^{x} \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$ 正是典型例子。整道题的重点，就是看出这种配对，并且知道在甚么情况下这是答案等于 a 的唯一途径。

解答

第 (i) 部分

设 $I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$。代入 $x = -u$（于是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$，而积分上下限互换后又换回来），

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{e}^{u}}{\mathrm{e}^{u}+1}\,\mathrm{d}u,$$

这里把分子和分母同乘以 e^{u}。把这式与 I 的原式相加，

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{1+\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = 2a,$$

所以对所有 $a \geq 0$，都有 $I = a$，得证。

第 (ii) 部分

解释。对 $a \geq 0$，定义 $G(a) = \displaystyle\int_{0}^{a} g(x)\,\mathrm{d}x$。由于 g 连续（continuous），微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）告诉我们 G 可导（differentiable），且 $G'(a) = g(a)$

（在 $a=0$ 处为单侧导数（one-sided derivative））。但 G 在 $[0,\infty)$ 上恒等于零，所以它在该处的导数为零。因此对所有 $a\geq 0$，都有 $g(a)=0$。（连续性很重要：没有它的话，g 可以在个别孤立点上不为零，而不影响任何积分。）

折叠积分。在 0 处分开，并在左半部分代入 $x=-u$：

$$\int_{-a}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)}=\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{f}(-u)}.$$

把 a 写成 $a=\int_0^a 1\,\mathrm{d}x$，便得到

$$\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)}-a=\int_{0}^{a}g(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \text{其中}\quad g(x)=\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)}+\frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)}-1.$$

由于 $\mathrm{f}\geq 0$，两个分母都至少为 1，所以 g 连续。

> **想一想** 刚才解释的结果只是单向的命题。它给出“当且仅当”（if and only if）的哪一个方向？另一个方向又从何而来？

- 若对所有 $x\geq 0$ 都有 $g(x)=0$，则 $\int_0^a g=0$，于是对所有 $a\geq 0$，该积分都等于 a。这个方向是显然的。
- 反过来，若对所有 $a\geq 0$，该积分都等于 a，则对所有 $a\geq 0$ 都有 $\int_0^a g=0$，再由第一段的结果（套用于这个连续的 g），得出对所有 $x\geq 0$ 都有 $g(x)=0$。

所以积分条件成立，当且仅当对所有 $x\geq 0$ 都有 $g(x)=0$。

乘积条件。设 $p=\mathrm{f}(x)$，$q=\mathrm{f}(-x)$。两边同乘以 $(1+p)(1+q)>0$，

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+p}+\frac{1}{1+q}=1 &\iff (1+q)+(1+p)=(1+p)(1+q)\\ &\iff 2+p+q=1+p+q+pq\\ &\iff pq=1.\end{aligned}$$

所以对所有 $x\geq 0$ 都有 $g(x)=0$，当且仅当对所有 $x\geq 0$ 都有 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=1$。最后，把 x 换成 $-x$ 时，式子 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)$ 不变，所以它对所有 $x\geq 0$ 等于 1，恰好等同于它对所有实数 x 等于 1。这样便完成了整条等价（equivalence）链。

第 (iii) 部分

跟之前完全一样地折叠积分，这次在左半部分用上 $\mathrm{h}(-u)=\mathrm{h}(u)$：

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a}\frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{a}\frac{\mathrm{h}(-u)}{1+\mathrm{f}(-u)}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{0}^{a}\mathrm{h}(x)\left(\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)}+\frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{a}\mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这是因为根据第 (ii) 部分证明的等价关系，只要 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=1$，括号内的式子便等于 1。（条件 $\mathrm{f}\geq 0$ 及连续性只是确保每个被积函数都连续。）

第 (iv) 部分

想一想 怎样把 $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\cosh x}$ 写成 $\dfrac{\text{常数}}{1+\mathrm{f}(x)}$ 的形式?

由于 $\cosh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$，

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}=\frac{2\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}=\frac{2\cos x}{1+\mathrm{e}^{2x}},$$

这里把分子和分母同乘以 e^{x}。取 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{2x}$，它连续、为正，并满足 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x}=1$；再取 $\mathrm{h}(x)=2\cos x$，它连续且为偶函数（even function）。以 $a=\frac{1}{2}\pi$ 套用第 (iii) 部分，得

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}2\cos x\,\mathrm{d}x=\Big[2\sin x\Big]_{0}^{\frac{1}{2}\pi}=2.$$

验算

- 第 (i) 部分是第 (iii) 部分在 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{e}^{x}$、$\mathrm{h}\equiv 1$ 时的特例，给出 $\int_{0}^{a}1\,\mathrm{d}x=a$，与预期相符。
- 一个反例：$\mathrm{f}(x)=x^{2}$ 有 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)=x^{4}\neq 1$，而确实 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^{2}}=\frac{\pi}{2}\neq 1$。
- 用辛普森法则（Simpson's rule）对第 (iv) 部分的积分作数值计算，得到 2.0000000；第 (iii) 部分的恒等式亦已用电脑对多个随机选取的 $\mathrm{f}=\mathrm{e}^{(\text{奇函数})}$ 及偶函数 h 加以验证。

常见错误

- 在第 (ii) 部分只证明了“当且仅当”的其中一个方向：从积分条件推回 $g = 0$ 的那一步，正正需要用到第一个结果（以及 g 的连续性）。
- 忘记说明为何 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$ 对 $x \geq 0$ 成立便足以推出它对所有 x 成立：原因是这个式子在 $x \mapsto -x$ 之下对称。
- 在第 (iv) 部分，试图直接积分 $\mathrm{e}^{-x}\cos x/\cosh x$，而不是先把它改写成 $2\cos x/(1+\mathrm{e}^{2x})$。

STEP 之外

第 (ii) 部分的论证，其实是把微积分基本定理“倒过来”用；这也是分析（analysis）中经常出现连续性假设的原因：积分“看不见”个别点上发生的事，所以只有在连续的情况下，才能从一个函数的积分还原出它的函数值。折叠技巧与把函数拆成偶部分和奇部分的做法是近亲；在这里，$\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} - \frac{1}{2}$ 是奇函数（odd function），恰好当 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对微积分基本定理以及为何需要连续性有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。