详细解答

STEP III 2022，第 4 题

纯数学 · 无穷乘积

STEP III 2022，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 2.5 节韦达乘积中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/viete.html

关键思路

一切都建基于倍角公式（double-angle formula）$\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta$，并反复应用：每用一次，$\sinh$ 的自变量便减半，同时留下一个 $\cosh$ 因子。减半 n 次之后，剩下的 $\sinh(x/2^n)$ 非常小，而且表现得跟 $x/2^n$ 一样，所以令 $n\to\infty$ 便能把一个有限的恒等式变成一个无穷乘积（infinite product）。最后两部分就是在精心挑选的 x 值上计算这个乘积，再配合它的三角函数版本。

解答

第 (i) 部分

记 $P_n(x) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)$。我们证明对每个正整数 n，都有 $\sinh x = 2^n P_n(x)\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)$。

基础情况（*base case*）$n=1$。在倍角公式中取 $\theta = x/2$，得 $\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$，这正是 $n=1$ 时的命题。

归纳步骤（*inductive step*）。假设结果对某个 $n=k$ 成立。在倍角公式中取 $\theta = x/2^{k+1}$，

$$\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\sinh x &= 2^k P_k(x)\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2^k P_k(x)\cdot 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\\ &= 2^{k+1}P_{k+1}(x)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),\end{aligned}$$

这就是 $n = k+1$ 时的结果。由归纳法（induction），结果对所有正整数 n 都成立。

推论。若 $x \neq 0$，则 $x/2^n \neq 0$，所以 $\sinh(x/2^n) \neq 0$（sinh 唯一的零点在 0）。因此我们可以把恒等式除以 $x\sinh(x/2^n)/2^n$，得到

$$\frac{\sinh x}{x}\cdot\frac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)} = P_n(x),$$

即为所求。

第 (ii) 部分

当 $y \neq 0$ 时，把麦克劳林级数（Maclaurin series）除以 y，得

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots = 1 + y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{y^{2r-2}}{(2r+1)!}.$$

想一想 只说“第一项之后的每一项都趋于 0”足够吗?

不完全足够：项数有无穷多，所以我们应该为它们的和找一个界。当 $0 < |y| \leq 1$ 时，$y^{2r-2} \leq 1$，所以

$$0 \leq \frac{\sinh y}{y} - 1 \leq y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1),$$

而当 $y \to 0$ 时，右边趋于 0。因此 $\dfrac{\sinh y}{y} \to 1$，取倒数（reciprocal）后得 $\dfrac{y}{\sinh y} \to 1$。现在固定 $x \neq 0$，并在 (i) 的恒等式中令 $n \to \infty$。设 $y = x/2^n$；那么 $y \to 0$，所以因子 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ 趋于 1。于是左边趋于 $\dfrac{\sinh x}{x}$，而右边是部分积（partial product）$P_n(x)$。所以部分积收敛（converge）至 $\dfrac{\sinh x}{x}$，这正是以下命题：

$$\frac{\sinh x}{x} = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdots.$$

第 (iii) 部分

取 $x = \ln 2$，则 $\mathrm{e}^{x/2^n} = 2^{1/2^n}$，所以

$$\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{2^{1/2^n} + 2^{-1/2^n}}{2} = \frac{2^{2/2^n}+1}{2\times 2^{1/2^n}} = \frac{1+2^{1/2^{n-1}}}{2\times 2^{1/2^n}},$$

这里把分子和分母同乘以 $2^{1/2^n}$。当 $n=1$ 时，得 $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)=\dfrac{1+2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$；当 $n=2$ 时，得

$$\cosh\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{1+2^{1/2}}{2\times 2^{1/4}},$$

即为所求。

在 (ii) 的左边，$\sinh(\ln 2)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$，所以 $\dfrac{\sinh x}{x}=\dfrac{3}{4\ln 2}$。

在右边，首 N 个因子的部分积为

$$P_N(\ln 2)=\frac{\prod_{n=1}^{N}\left(1+2^{1/2^{n-1}}\right)}{2^N\cdot 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}}}=\frac{3}{2}\cdot\prod_{k=1}^{N-1}\frac{1+2^{1/2^k}}{2}\cdot\frac{1}{2^{1-1/2^N}},$$

这里我们抽出了 $n=1$ 的因子 $(1+2)/2$，以 $k=n-1$ 重新编号，并把指数中的等比级数（geometric series）求和。当 $N\to\infty$ 时，$2^{1-1/2^N}\to 2$，而由 (ii) 得 $P_N(\ln 2)\to\dfrac{3}{4\ln 2}$。

因此部分积 $\prod_{k=1}^{N-1}\frac{1+2^{1/2^k}}{2}$ 收敛，而且

$$\frac{3}{4\ln 2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1+2^{1/2^k}}{2},$$

约去 $\frac{3}{4}$ 后得

$$\frac{1}{\ln 2}=\frac{1+2^{\frac{1}{2}}}{2}\times\frac{1+2^{\frac{1}{4}}}{2}\times\frac{1+2^{\frac{1}{8}}}{2}\times\cdots.$$

第 (iv) 部分

同一论证换成 sin 和 cos 后一字不改地适用，因为 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 具有相同的形式。由归纳法得

$$\sin x=2^n\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^n}\right)\sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

当 $0<x<\pi$ 时，$0<x/2^n<\pi$，所以 $\sin(x/2^n)\neq 0$，可以像之前一样相除。麦克劳林级数 $\sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\cdots$ 给出：当 $0<|y|\le 1$ 时，

$$\left|\frac{\sin y}{y}-1\right|\le y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!}=y^2(\sinh 1-1)\to 0,$$

所以 $\sin y/y\to 1$，令 $n\to\infty$，得

$$\frac{\sin x}{x}=\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots.$$

（另一个方法是在 (ii) 中代入 $x=\mathrm{i}t$，并利用 $\cosh(\mathrm{i}t)=\cos t$ 和 $\sinh(\mathrm{i}t)=\mathrm{i}\sin t$；但 (ii) 中的级数论证是针对实数 y 的，所以直接重做一遍会更干净。）

取 $x=\frac{\pi}{2}$：左边为 $\dfrac{1}{\pi/2}=\dfrac{2}{\pi}$，而各因子为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$，如此类推。

想一想 怎样把 $\cos(\pi/8)$、$\cos(\pi/16)$、... 化成嵌套平方根?

把 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 写成 $2\cos\theta = \sqrt{2+2\cos 2\theta}$ 的形式；这里取正根，因为当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时 $\cos\theta > 0$。设 $c_n = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right)$。那么 $c_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$，而取 $\theta = \pi/2^{n+2}$，得

$$c_{n+1} = \sqrt{2 + c_n}.$$

所以 $c_1 = \sqrt{2}$、$c_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$、$c_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，如此类推，而乘积的第 n 个因子是 $c_n/2$。因此

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots,$$

这就是 1593 年的韦达（Viète）公式。

验算

- 在 (i) 中代入 $n = 1$ 和 $x = 2\theta$：会得回倍角公式，理应如此。
- 在 (iii) 中，$\cosh(\frac{1}{2}\ln 2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.0607$，而一般 n 的公式在 $n = 1$ 时与此吻合。
- 数值上，(iii) 的乘积很快便稳定下来：首 6o 个因子给出 1.442695...，与 $1/\ln 2 = 1.4426950\ldots$ 吻合；而 (iv) 的乘积给出 0.6366197...，与 $2/\pi$ 吻合。两者均已用电脑验证至约 15 位有效数字（significant figures）。

常见错误

- 除以 $\sinh(x/2^n)$ 时，没有指出它因 $x \neq 0$ 而不为零。
- 在 (iii) 中出现差一错误：$n = 1$ 的因子是 $3/(2\sqrt{2})$，并不是 $(1+2^{1/2^k})/2$ 的形式；而零散的幂 $2^{1/2}\cdot 2^{1/4}\cdots$ 合起来给出因子 2，而不是 1。
- 没有从级数作任何论证便假设“$y/\sinh y \to 1$”，而这正是题目要求证明的。

STEP 之外

无穷乘积 $\prod a_n$ 定义为其部分积的极限，正如无穷级数是其部分和（partial sums）的极限；取对数（logarithm）可以把两者互相转换，所以 $\prod(1+u_n)$ 的收敛与 $\sum u_n$ 的收敛密切相关。这里 $\sin x/x$ 的乘积，与欧拉（Euler）更著名的乘积 $\sin x = x\prod_{k\geq 1}\left(1 - x^2/(k^2\pi^2)\right)$ 并列，后者可推出 $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$。若想了解如何严谨处理极限，使第 (ii) 部分这类论证变得严密，可阅读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。