详细解答

STEP III 2022，第 3 题

纯数学 · 隐函数微分法

STEP III 2022，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

用隐函数求导（implicit differentiation）。驻点（stationary point）要求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的分子为零，由此可把 y 以 x 表示（或得出两者之间的一个线性关系）。把它代回曲线方程，便只剩下一条关于 x 的方程，问题于是变成：这条方程何时有两个实根（real roots）？在 (i) 中，它其实是一条变了装的二次方程（quadratic）；在 (ii) 中，它是一条四次方程（quartic），而数算其根的方法是找出它的转向点（turning point）。

解答

第 (i) 部分

将 $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ 对 x 作隐函数求导，得

$$2ax + by + (bx + 2cy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

在驻点处 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$，所以 $2ax + by = 0$，即 $y = -\frac{2a}{b}x$（因为 $abc \neq 0$，所以可以除以 b）。代入曲线方程，

$$ax^2 - 2ax^2 + \frac{4a^2c}{b^2}x^2 = 1$$
$$\frac{a(4ac - b^2)}{b^2}x^2 = 1.$$

若 $4ac - b^2 \leq 0$，则对所有 x，左方都 ≤ 0（记得 $a > 0$），所以根本没有驻点。因此，若曲线有两个驻点，必有 $4ac - b^2 > 0$，即 $b^2 < 4ac$，得证。（反过来，当 $b^2 < 4ac$ 时，得 $x = \pm|b|/\sqrt{a(4ac - b^2)}$，恰好给出两个点。）

? **想一想** 在这些点上，$bx+2cy$ 会不会也是零，以致导数其实没有定义？

若 $2ax+by=0$ 与 $bx+2cy=0$ 同时成立，由于行列式（determinant）$4ac-b^2$ 不为零，唯一的解是 $x=y=0$，而这点并不在曲线上。所以这两点确实满足 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$。

第 (ii) 部分

将 $ay^3+bx^2y+cx=1$ 作隐函数求导，得

$$(3ay^2+bx^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2bxy+c=0.$$

因此在驻点处 $2bxy+c=0$。由于 $c\neq 0$，故 $x\neq 0$，于是 $y=-\dfrac{c}{2bx}$。代入曲线方程，

$$-\frac{ac^3}{8b^3x^3}-\frac{cx}{2}+cx=1,\qquad \text{即}\qquad -\frac{ac^3}{8b^3x^3}+\frac{cx}{2}=1.$$

两边乘以 $8b^3x^3$ 并移项，

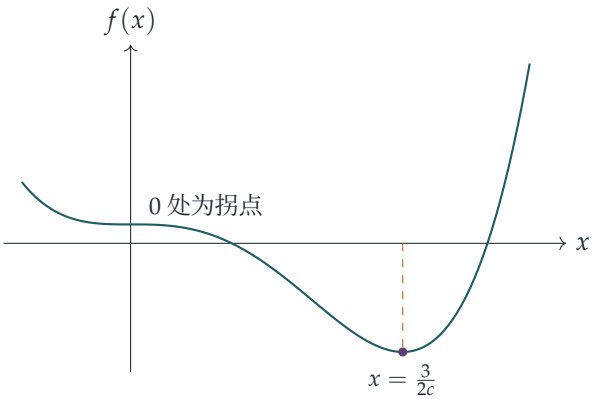
$$4cb^3x^4-8b^3x^3-ac^3=0,$$

这正是所求的方程。

把左方记作 $f(x)$。由于 $y=-c/(2bx)$ 由 x 决定，每个驻点的 x 坐标各不相同。所以有两个驻点，就表示 f 至少有两个相异实根。要数算 f 的根，可以看它的导数：

$$f'(x)=16cb^3x^3-24b^3x^2=8b^3x^2(2cx-3).$$

因子 x^2 永不变号，所以 f' 只在 $x=\frac{3}{2c}$ 处变号。设 $c>0$。那么首项系数（leading coefficient）$4cb^3$ 为正（因为 $b>0$），f 在 $x<\frac{3}{2c}$ 时严格递减，在 $x>\frac{3}{2c}$ 时严格递增；$x=0$ 只是一个水平拐点（stationary point of inflection）。因此 f 在 $\frac{3}{2c}$ 两侧各最多有一个根，而它有两个相异根当且仅当其最小值为负。若 $c<0$，情况全部倒转：f 先增后减，有两个相异根当且仅当其最大值为正。两种情况下，条件都是 $c\,f\left(\frac{3}{2c}\right)<0$。



$a=-1$，$b=c=1$ 的情况：$f(x)=4x^4-8x^3+1$ 只有一个转向点，即 $x=\frac{3}{2}$ 处的极小点，并有两个实根。

现在在转向点求值：

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{3}{2c}\right) &= 4cb^3\cdot\frac{81}{16c^4}-8b^3\cdot\frac{27}{8c^3}-ac^3 \\ &= \frac{81b^3}{4c^3}-\frac{108b^3}{4c^3}-ac^3=-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}. \end{aligned}$$

所以

$$c\,f\left(\tfrac{3}{2c}\right)=-\frac{4ac^6+27b^3}{4c^2},$$

而这式为负当且仅当 $4ac^6+27b^3>0$。因此，若曲线有两个驻点，则 $4ac^6+27b^3>0$。

第 (iii) 部分

第二及第三条方程表示 $2bxy+c$ 以及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的系数 $3ay^2+bx^2$ 同时为零，所以这是曲线上一个令 (ii) 的方法失效的点。由于 $c\neq 0$，第二条方程给出 $x\neq 0$ 及 $y=-\dfrac{c}{2bx}$。前两条方程正是我们在 (ii) 中所用的，所以 x 满足

$$4cb^3x^4-8b^3x^3-ac^3=0. \qquad (*)$$

把 $y=-c/(2bx)$ 代入第三条方程，

$$\frac{3ac^2}{4b^2x^2}+bx^2=0 \quad\Longrightarrow\quad 4b^3x^4=-3ac^2.$$

乘以 c，可见 $(*)$ 的第一项为 $-3ac^3$，于是 $(*)$ 变成

$$-3ac^3-8b^3x^3-ac^3=0 \quad\Longrightarrow\quad x^3=-\frac{ac^3}{2b^3}.$$

把 $x^4=-\dfrac{3ac^2}{4b^3}$ 除以此式（因 $x\neq 0$，可以这样做），得

$$x=\frac{-3ac^2/(4b^3)}{-ac^3/(2b^3)}=\frac{3}{2c}.$$

所以这个解恰好位于 (ii) 中 f 的转向点。把 $x=\frac{3}{2c}$ 代回 $x^3=-\frac{ac^3}{2b^3}$：

$$\frac{27}{8c^3}=-\frac{ac^3}{2b^3} \quad\Longrightarrow\quad 54b^3=-8ac^6 \quad\Longrightarrow\quad 4ac^6+27b^3=0,$$

得证。（等价地，由 (ii) 的公式可知 $f\left(\frac{3}{2c}\right)=0$。）这是 (ii) 的边界情况：四次方程的两个根在转向点合并成一个重根（repeated root），而曲线在该处有一个奇点（singular point），而不是两个驻点。

验算

- 在 (i) 中取 $a = c = 1$、$b = 1$：曲线 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 是一个椭圆（ellipse），且 $b^2 = 1 < 4$；它的驻点位于 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$、$y = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$，这些点确实在曲线上。
- 在 (ii) 中取 $a = -1$、$b = c = 1$，得 $4ac^6 + 27b^3 = 23 > 0$，而 f 的最小值为 $f(\frac{3}{2}) = -5.75 = -\frac{23}{4}$，与 $-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}$ 吻合。
- 在 (iii) 中取 $a = -2$、$c = 1.3$，并取 b 使 $27b^3 = -4ac^6$；那么 $x = \frac{3}{2c}$、$y = -\frac{c}{2bx}$ 在舍入误差范围内满足全部三条方程。以电脑对数千组随机的 (a, b, c) 作检验，亦证实驻点的数目与 (i) 和 (ii) 中的条件相符。

常见错误

- 忘记 $x = 0$ 是四次多项式的一个临界点：它是拐点（point of inflection）而非转向点，指出这一点才能断定最多只有两个根。
- 忽略 c 的正负号：只有当 $c > 0$ 时，转向点才是极小点。把条件写成 $c\,f(\frac{3}{2c}) < 0$，便可一次过处理两种情况。
- 在 (i) 中没有指出 $b^2 = 4ac$ 的情况会得出 $0 = 1$，所以这情况同样没有驻点。

STEP 之外

量 $4ac^6 + 27b^3$ 在相差一个因子的意义下，就是该四次方程的判别式（discriminant）：它为零当且仅当四次方程有重根，正如二次方程的 $b^2 - 4ac$（以及三次方程 $t^3 + pt + q$ 的 $4p^3 + 27q^2$）一样。第 (iii) 部分展示了它的几何意义：重根对应曲线上的一个奇点，在该点 $ay^3 + bx^2y + cx$ 的两个偏导数（partial derivatives）同时为零。奇点与判别式是代数几何（algebraic geometry）的起点；若想以浅白而直观的方式认识与多项式及曲线相关的概念，可读 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）；若想做更多同类型的题目，可读 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。