详细解答

STEP III 2022，第 2 题

纯数学 · 无穷递降法

STEP III 2022，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 1.5 节无穷递降法中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/infinite-descent.html

关键思路

这是费马（Fermat）的无穷递降法（*method of infinite descent*）。假设存在一组非零整数解。通过整除性（divisibility）论证，可证明所有变量都有一个公因数。把它除去，便得到同一类（或密切相关的一类）的新解，而且各数都是绝对值严格更小的非零整数。这个过程不可能无止境地进行下去，因为正整数不可能无止境地递减。每一部分的工夫在于找出应考虑的质数（prime）（2 或 3），并验证新解确实与旧解具有相同的形式。

解答

全程我们会用到两个事实。若质数 m 整除 x^k，则 m 整除 x。另外，若 x 是 $m \geq 2$ 的非零倍数，则 x/m 是非零整数，且 $|x/m| < |x|$。

第 (i) 部分

假设 $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$，其中 a, b, c 为非零整数。那么

$$a^3 = -2\left(b^3 + 2c^3\right)$$

是偶数。奇数的立方是奇数，所以 a 是偶数。设 $a = 2p$，则 p 是非零整数，且 $|p| = \frac{1}{2}|a| < |a|$。代入得

$$8p^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

这就是第一个结论。

现在对新方程重复同一论证，得 $b^3 = -2\left(2p^3 + c^3\right)$，所以 b 是偶数，设 $b = 2q$，于是

$$4p^3 + 8q^3 + 2c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2p^3 + 4q^3 + c^3 = 0.$$

再做一次，$c^3 = -2\left(p^3 + 2q^3\right)$，所以 $c = 2r$，且

$$2p^3 + 4q^3 + 8r^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p^3 + 2q^3 + 4r^3 = 0.$$

这里 $p = a/2$、$q = b/2$ 和 $r = c/2$ 都是非零整数，且 $|p| < |a|$、$|q| < |b|$ 及 $|r| < |c|$，正如所求。

> **想一想** 为甚么这表示根本没有解，而不只是“另一组解”？

假设存在非零整数解。在所有这些解之中，选取 $|a|$ 尽可能小的一组。这是做得到的，因为任何非空的正整数集合都有最小元素（least element）。上述论证于是给出另一组非零整数解 (p, q, r)，且 $|p| < |a|$，这与 $|a|$ 的最小性矛盾。所以这样的整数 a、b、c 并不存在。（等价地说，这个过程会给出一个由正整数组成、无穷且严格递减的数列 $|a| > |a/2| > |a/4| > \cdots$，而这是不可能的。）

第 (ii) 部分

这次要用的质数是 3。假设 $9a^3 + 10b^3 + 6c^3 = 0$，其中 a, b, c 为非零整数。

- 由于 $10b^3 = -3\left(3a^3 + 2c^3\right)$，3 整除 $10b^3$。因为 3 不整除 10，所以它整除 b^3，从而整除 b。设 $b = 3q$，则 $9a^3 + 270q^3 + 6c^3 = 0$，即
$$3a^3 + 90q^3 + 2c^3 = 0.$$
- 现在 $2c^3 = -3\left(a^3 + 30q^3\right)$，所以 $3 \mid c$。设 $c = 3r$：$3a^3 + 90q^3 + 54r^3 = 0$，即
$$a^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0.$$
- 最后 $a^3 = -3\left(10q^3 + 6r^3\right)$，所以 $3 \mid a$。设 $a = 3p$：$27p^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0$，即
$$9p^3 + 10q^3 + 6r^3 = 0.$$

所以 $(p, q, r) = (a/3, b/3, c/3)$ 是同一方程的非零整数解，且 $|p| < |a|$。与第 (i) 部分一样，选取 $|a|$ 最小的一组解，便得出矛盾，所以不存在非零整数解。

第 (iii) 部分

任何不是 3 的倍数的整数，都可以写成 $3n \pm 1$，其中 n 为某个整数。那么

$$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3\left(3n^2 \pm 2n\right) + 1,$$

即比 3 的某个倍数大 1。另一方面，3 的倍数的平方是 3 的倍数（事实上更是 9 的倍数）。

因此每个平方数除以 3 的余数是 0 或 1，而余数为 0 当且仅当该数本身是 3 的倍数。对于 x^2+y^2，可能的余数是

$$0+0=0, \qquad 0+1=1, \qquad 1+1=2.$$

所以 x^2+y^2 是 3 的倍数，仅当两个余数都是 0，亦即仅当 x 和 y 都是 3 的倍数。

现在假设 $a^2+b^2=3c^2$，其中 a,b,c 为非零整数。右方是 3 的倍数，所以由刚证明的结果，$a=3p$ 及 $b=3q$。于是

$$9p^2+9q^2=3c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2=3\left(p^2+q^2\right).$$

所以 c^2 是 3 的倍数。由第一个结果，c 必定是 3 的倍数，否则 c^2 会比 3 的某个倍数大 1。设 $c=3r$：

$$9r^2=3\left(p^2+q^2\right) \quad \Longrightarrow \quad p^2+q^2=3r^2.$$

这是同一方程的非零整数解，且 $|p|<|a|$。选取 $|a|$ 最小的一组解，便得出与之前相同的矛盾，所以不存在非零解。

第 (iv) 部分

这里我们以 4 为模（modulo）进行计算。偶数 $2m$ 的平方是 $4m^2\equiv 0$，而奇数 $2m+1$ 的平方是 $4m^2+4m+1\equiv 1 \pmod 4$。所以三个平方数之和的余数，等于三项中奇数的个数（0、1、2 或 3）。它是 4 的倍数，仅当三个数都是偶数。

? **想一想** 若把 $a^2+b^2+c^2=4abc$ 中的所有数减半，会得回同一条方程吗?

不会。若 $a=2p$、$b=2q$ 及 $c=2r$，方程变为 $4(p^2+q^2+r^2)=32pqr$，即 $p^2+q^2+r^2=8pqr$。系数加倍了。所以我们改为证明一个更强、而且在减半之下确实保持不变的命题：

命题。对任何整数 $k\geq 2$，都不存在非零整数使得 $a^2+b^2+c^2=2^kabc$。

假设存在。在所有这样的解之中（$k\geq 2$ 可取任何值），选取 $|a|$ 尽可能小的一组。由于 $k\geq 2$，右方 2^kabc 是 4 的倍数。所以 $a^2+b^2+c^2$ 是 4 的倍数，由上面的说明，a、b 和 c 都是偶数：$a=2p$、$b=2q$、$c=2r$。于是

$$4\left(p^2+q^2+r^2\right)=2^k\cdot 8pqr \quad \Longrightarrow \quad p^2+q^2+r^2=2^{k+1}\,pqr.$$

这是一组非零整数解，其指数为 $k+1\geq 2$，且 $|p|<|a|$，与 a 的选取矛盾。所以命题成立。取 $k=2$ 的情况，即知不存在非零整数 a,b,c 使得 $a^2+b^2+c^2=4abc$。

验算

- 以电脑搜索所有满足 $|a|, |b|, |c| \leq 40$ 的非零 a, b, c，四条方程都找不到任何解，对 $2 \leq k \leq 6$ 的 $a^2 + b^2 + c^2 = 2^k abc$ 亦然。
- 令第 (iv) 部分得以成立的，正是系数中 2 的幂。某些这种形式的方程确实有解，例如 $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ 及 $3^2 + 3^2 + 3^2 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$。在这些例子中系数是奇数，所以模 4 的论证无从入手。
- 试把递降法套用在一个“差一点”的例子上：$a^2 + b^2 = 3c^2$ 在 $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ 时不成立，因为 $1 + 1 = 2$ 不是 3 的倍数，这正是第 (iii) 部分中“$1 + 1 = 2$”的情况。

常见错误

- 忘记说明递降为何导致矛盾。“我们得到更小的解”并不构成证明，除非你引用最小解（或正整数不可能无止境递减这一事实）。
- 在第 (iv) 部分把数减半后，声称方程不变。事实并非如此：系数加倍了，这正是命题必须加强的原因。
- 写“$3 \mid c^2$ 所以 $3 \mid c$”而不给理由。这里的理由是第 (iii) 部分的第一个结果（更一般地说，因为 3 是质数）。

STEP 之外

费马正是用无穷递降法证明 $x^4 + y^4 = z^2$ 没有正整数解，从而解决了他的最后定理（费马大定理，Last Theorem）中 $n = 4$ 的情况。这里的每一次递降，实际上都等于证明：以某个适当的质数幂为模时，方程没有变量不全被该质数整除的解。这是迈向 p 进数（p-adic numbers）以及现代数论中局部—整体（local–global）思想的第一步。著名的方程 $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$（马尔可夫方程（Markov equation））有无穷多组解，它们由一个优美的树状结构生成。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）正好以这个程度讲解递降法、同余（congruence）和平方和。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。