详细解答

STEP III 2022，第 12 题

概率与统计 • 圆的随机弦

STEP III 2022，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 12.3 节“随机”是甚么意思？中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch12/bertrand.html

关键思路

本题中所有的弦都源自同一个事实：在半径为 a 的圆中，与圆心的垂直距离为 d 的弦（chord），长度为 $2\sqrt{a^2-d^2}$。因此要做的，就是用随机量把 d 表示出来，然后求平均。在第 (ii) 部分，代换（substitution）$u = a^2 - r^2\sin^2 t$ 是很自然的选择，因为 R 的概率密度（probability density）恰好提供了这个代换所需要的因子 r。

解答

第 (i) 部分

设 Θ 为角 AOB，则 Θ 在 $[0, 2\pi]$ 上均匀分布（uniformly distributed），密度为 $\frac{1}{2\pi}$。三角形 AOB 是顶角为 Θ 的等腰三角形。从 O 向 AB 作垂线，这条垂线同时平分顶角和弦，所以

$$AB = 2a\sin\tfrac{1}{2}\Theta.$$

这对所有 $\Theta \in [0, 2\pi]$ 都成立，因为在这个范围内 $\sin\frac{1}{2}\Theta \geq 0$；当 $\Theta > \pi$ 时，我们量度的是优角（reflex angle），但弦是同一条。因此

$$\mathrm{E}(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\pi}\Big[-2\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{a}{\pi}(2+2) = \frac{4a}{\pi}.$$

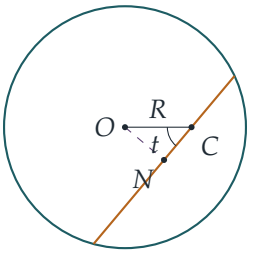
第 (ii) 部分

R 的密度。对于 $0 \le r \le a$，事件 $R \le r$ 表示 C 落在以 O 为圆心、半径为 r 的圆盘内。由于概率与面积成正比，

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}, \qquad \text{所以} \qquad f_R(r) = \frac{2r}{a^2} \quad (0 \le r \le a),$$

而在其他情况下 $f_R(r) = 0$。

弦的长度。设 N 为从 O 到弦的垂足。在直角三角形 ONC 中，斜边是 $OC = R$，而在 C 处的角是 t，所以 $ON = R\sin t$。



从圆心所作的垂线平分弦，N 就是弦的中点，所以在由 O、N 和弦的一个端点组成的三角形中应用毕氏定理（Pythagoras′ theorem），得

$$\text{弦长} = 2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2 t}.$$

由于 $R < a$，根号内的式子是正数。注意这里计算的是整条弦，包括 C 两侧的部分。

期望长度。固定 t，而 C 为随机，

$$\mathrm{L}(t) = \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2\sin^2 t}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r.$$

取 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$，使得 $\sin t \ne 0$。代入 $u = a^2 - r^2\sin^2 t$，则 $\mathrm{d}u = -2r\sin^2 t\,\mathrm{d}r$；当 $r = 0$ 时 $u = a^2$，当 $r = a$ 时 $u = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t$。于是

$$\mathrm{L}(t) = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\int_{a^2\cos^2 t}^{a^2} u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\cdot\frac{2}{3}\left(a^3 - a^3\cos^3 t\right) = \frac{4a(1-\cos^3 t)}{3\sin^2 t},$$

其中用到 $(a^2\cos^2 t)^{3/2} = a^3\cos^3 t$，这是成立的，因为对于锐角，$\cos t \ge 0$。这就是所求的公式。

想一想 怎样才能把分母 $\sin^2 t$ 化成可以与 $1 - \cos^3 t$ 约去的形式?

设 $c = \cos t$。那么 $\sin^2 t = 1 - c^2 = (1-c)(1+c)$，而 $1 - c^3$ 是立方差（difference of cubes），即 $(1-c)(1+c+c^2)$。由于 $c \ne 1$，可以约去 $1 - c$：

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\cdot\frac{1+c+c^2}{1+c} = \frac{4a}{3}\left(c + \frac{1}{1+c}\right),$$

因为 $c(1+c)+1 = 1+c+c^2$。最后，$1+\cos t = 2\cos^2 \frac{1}{2}t$，所以 $\dfrac{1}{1+\cos t} = \frac{1}{2}\sec^2 \frac{1}{2}t$，从而

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\left(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\left(\tfrac{1}{2}t\right)\right),$$

即为所求。这个形式在 $t = 0$ 时没有问题：它给出 $\frac{4a}{3}\cdot\frac{3}{2} = 2a$，这是正确的，因为沿 OC 方向经过 C 的弦就是直径。

第 (iii) 部分

T 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的密度为 $\frac{2}{\pi}$，所以使用 L 的第二个形式（它很容易积分，因为 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$），

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\mathrm{L}(T)\big) &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4a}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\cos t + \tfrac{1}{2}\sec^2\tfrac{1}{2}t\right)\mathrm{d}t = \frac{8a}{3\pi}\Big[\sin t + \tan\tfrac{1}{2}t\Big]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{8a}{3\pi}(1+1) = \frac{16a}{3\pi}.\end{aligned}$$

验算

- 当 $t = \frac{1}{2}\pi$ 时，弦垂直于 OC，而 $\mathrm{L} = \frac{4a}{3}(0 + \frac{1}{2}\cdot 2) = \frac{4a}{3}$。直接计算，$\int_0^a 2\sqrt{a^2-r^2}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4a}{3}$，结果相同。
- 当 t 由 0 增至 $\frac{1}{2}\pi$ 时，$\mathrm{L}(t)$ 应由 $2a$ 下降至 $\frac{4}{3}a$；而 (iii) 的答案 $\frac{16}{3\pi}a \approx 1.698a$ 正好介于两者之间，平均值理应如此。
- 取 $a = 1.7$ 和 $t = 0.7$，将弦长乘以 R 的密度作数值积分，得 3.01799，与 $\mathrm{L}(0.7)$ 的两条公式结果一致。(i) 的答案 $\frac{4}{\pi}a \approx 1.273a$ 亦已用数值积分核实。

常见错误

- 以为 R 在 $[0, a]$ 上均匀分布。点是按*面积*均匀分布的，而离圆心越远，面积越多，因此密度是 $2r/a^2$。
- 只计算弦在 C 一侧的部分，或者写成 $ON = R\cos t$（那是沿弦方向的距离 CN）。
- 在第 (iii) 部分积分 $\mathrm{L}(t)$ 的第一个形式，而不是第二个形式；题目特意设计了第二个形式，让你一行就能积分。

STEP 之外

这是几何概率（geometric probability）：“随机选取”只有在确定了分布之后才有意义。答案 $\frac{4a}{\pi}$ 和 $\frac{16a}{3\pi}$ 之所以不同，是因为它们描述的是选取弦的不同方式，这正是贝特朗悖论

（Bertrand's paradox）的要点。积分几何（integral geometry）利用在旋转和平移下保持不变的直线测度，把这类问题系统化。关于区域上的连续分布以及本题这类期望值的计算，可参阅 Blitzstein 和 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。