详细解答

STEP III 2022，第 10 题

力学 • 弹簧的平衡

STEP III 2022，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

由于 P 处的角是直角，两条弹簧的拉力互相垂直。因此沿每条弹簧方向分解（resolve），便能各自单独求出每个张力（tension），无须解联立方程。至于能量方面，弹性势能项与重力势能项合并得出奇地简洁，使 p 成为 θ 的一个简单函数（function）。第 (ii) 部分真正的重点，其实在于 θ 所受的物理限制：两条弹簧都必须处于伸长状态。

解答

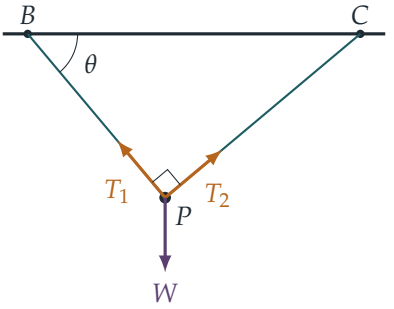
我们把 P 视为质点，并假设弹簧是轻的且遵守胡克定律（Hooke's law）。于是，一条弹性模量（modulus）为 λ、自然长度（natural length）为 a 的弹簧被拉长至长度 l 时，其张力为 $\lambda(l-a)/a$，所储存的能量为 $\lambda(l-a)^2/(2a)$。

第 (i) 部分

由于 $BC = 2a$ 且角 $BPC = 90°$，三角形 BPC 的斜边为 BC，所以

$$PB = 2a\cos\theta, \qquad PC = 2a\sin\theta, \qquad \angle PCB = 90° - \theta.$$

设 T_1 和 T_2 分别为 PB 和 PC 中的张力。



直线 PB 与水平方向成角 θ，所以它与铅垂方向成角 $90^\circ-\theta$；同理，PC 与铅垂方向成角 θ。由于 $PB\perp PC$，沿 PB 方向分解时只涉及 T_1 和重量，而重量沿 BP 方向（背离 B）的分量为 $W\cos(90^\circ-\theta)=W\sin\theta$。所以

$$T_1=W\sin\theta,\qquad \text{同理，沿}PC,\qquad T_2=W\cos\theta.$$

由胡克定律，

$$T_1=\frac{s_1W(2a\cos\theta-a)}{a}=s_1W(2\cos\theta-1),\qquad T_2=s_2W(2\sin\theta-1).$$

令两者相等，得

$$s_1=\frac{\sin\theta}{2\cos\theta-1},\qquad s_2=\frac{\cos\theta}{2\sin\theta-1},$$

这就是所求的 s_1，并一并得出 s_2。

第 (ii) 部分

重力势能。 P 位于 BC 下方，距离等于三角形从 P 出发的高，即 $PB\sin\theta=2a\sin\theta\cos\theta=a\sin2\theta$。以 BC 为零势能水平，重力势能（gravitational potential energy）为 $-Wa\sin2\theta$。

弹性势能。 PB 的伸长量（extension）为 $a(2\cos\theta-1)$，因此利用第 (i) 部分，

$$\frac{s_1W\,a^2(2\cos\theta-1)^2}{2a}=\tfrac12Wa\,s_1(2\cos\theta-1)^2=\tfrac12Wa\sin\theta\,(2\cos\theta-1),$$

同理，PC 中的能量为 $\frac12Wa\cos\theta\,(2\sin\theta-1)$。

*总和。*相加得

$$\begin{aligned}-paW&=-Wa\sin2\theta+\tfrac12Wa(2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta)\\&=-Wa\sin2\theta+Wa\sin2\theta-\tfrac12Wa(\sin\theta+\cos\theta),\end{aligned}$$

所以

$$p=\tfrac12(\sin\theta+\cos\theta)=\tfrac{\sqrt2}{2}\sin(\theta+\tfrac{\pi}{4}).$$

想一想 θ 可以是 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间的任何值吗?

不可以。模量 s_1W 和 s_2W 均为正数，而张力 $W\sin\theta$ 和 $W\cos\theta$ 亦为正数，所以两条弹簧都必须处于伸长状态：$2\cos\theta - 1 > 0$ 且 $2\sin\theta - 1 > 0$。（若其中一项为零，该弹簧便不会产生任何力，却仍须提供非零的张力。）因此 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ 且 $\sin\theta > \frac{1}{2}$，即

$$\tfrac{\pi}{6} < \theta < \tfrac{\pi}{3}, \qquad \text{故} \qquad \tfrac{5\pi}{12} < \theta + \tfrac{\pi}{4} < \tfrac{7\pi}{12}.$$

这个区间关于 $\frac{\pi}{2}$ 对称。在此区间上，$\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ 最大为 1（在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时取得），并严格大于它在端点的值 $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12}$。而

$$\sin\tfrac{5\pi}{12} = \sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4},$$

所以

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \;\geq\; p \;>\; \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{3}),$$

得证。

一位有效数字。我们需要 $0.65 \leq p < 0.75$，并以平方的方法来证明根式（surd）的估值。由于 $1.6^2 = 2.56 < 3$，得 $\sqrt{3} > 1.6$，所以 $p > \frac{1}{4}(2.6) = 0.65$。由于 $1.5^2 = 2.25 > 2$，得 $\sqrt{2} < 1.5$，所以 $p \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0.75$。因此，准确至一位有效数字（significant figure），$p = 0.7$。

验算

- 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，整个装置是对称的；事实上 $s_1 = s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$，且 $p = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.7071$。
- 当 $\theta \to \frac{\pi}{6}^+$ 时，$s_1 \to \infty$：弹簧 PB 处于自然长度，必须无限坚硬才能承受张力。此时 $p \to \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \approx 0.6830$，即下界。
- 我们用电脑对 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 中许多随机的 θ 作验证，确认所求得的位置是总势能的驻点（stationary point）（因此确实是平衡位置（equilibrium）），而且能量等于 $-\frac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta)$。

常见错误

- 把重力势能写成正号：P 位于零势能水平的下方。
- 在整个 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上求 $\frac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta)$ 的范围，因而得出错误的下界 $\frac{1}{2}$；弹簧必须处于张紧状态。
- 直接引用 $\sqrt{3} \approx 1.732$，却没有说明误差不会影响舍入结果。

STEP 之外

第 (ii) 部分中的抵消并非巧合：在平衡位置，总势能取驻值；而对于遵守胡克定律的弹簧，弹性势能恰好是（张力 $\times$ 伸长量）的一半，这使它与克服重力所做的功紧密相连。把平衡位置视为势能的驻点来研究，并通过二阶导数（second derivative）判断其稳定性（stability），是大学一年级力学的核心主题之一。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这种能量观点有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。