详细解答

STEP III 2022，第 1 题

纯数学 · 多项式的根

STEP III 2022，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

把参数化（parametrisation）代入圆的方程，就能把“两条曲线在哪里相交?”转化为“一个四次方程（quartic）的根是甚么?”；此后一切都只靠根与系数的关系（relationships between roots and coefficients）完成，完全不必解这个四次方程。另一个有用的技巧是：倒数（reciprocals）$1/t_i$ 正是把同一个四次方程的系数倒序排列后所得方程的根。至于最后一部分，“相切”（touching）的意思就是有重根（repeated root）。

解答

第 (i) 部分

参数为 t 的点位于 C_2 上，当且仅当

$$(ct-a)^2+\left(\frac{c}{t}-b\right)^2=r^2.$$

展开得 $c^2t^2-2act+a^2+\dfrac{c^2}{t^2}-\dfrac{2bc}{t}+b^2=r^2$。由于 $t\neq 0$，我们可以乘以 t^2 而不会增加或失去任何解：

$$c^2t^4-2act^3+(a^2+b^2-r^2)t^2-2bct+c^2=0.$$

因此每个 t_i 都是 $(*)$ 的根。不同的 t 值给出不同的点（它们的 x 坐标 ct 各不相同），所以四个点 P_i 对应四个互不相同的参数。一个四次方程最多只有四个根，因此 $t_1,\ldots,t_4$ 恰好就是 $(*)$ 的全部根。

第 (ii) 部分

把 $(*)$ 除以 c^2，各根之和以及两两之积的和分别为

$$\sum t_i = \frac{2a}{c}, \qquad \sum_{i<j} t_i t_j = \frac{a^2+b^2-r^2}{c^2}.$$

利用 $\left(\sum t_i\right)^2 = \sum t_i^2 + 2\sum_{i<j} t_i t_j$，

$$\sum_{i=1}^{4} t_i^2 = \frac{4a^2}{c^2} - \frac{2(a^2+b^2-r^2)}{c^2} = \frac{2}{c^2}(a^2-b^2+r^2),$$

这正是所求的结果。

? **想一想** 怎样才能求得 $\sum 1/t_i^2$，而不必处理繁复的公分母?

在 $(*)$ 中令 $u = 1/t$。由于常数项 $c^2 \neq 0$，没有任何根为零，所以可以把 $(*)$ 除以 t^4：

$$c^2 - 2acu + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2bcu^3 + c^2u^4 = 0,$$

即 $c^2u^4 - 2bcu^3 + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2acu + c^2 = 0$。它的根就是各个 $1/t_i$。这正是把 $(*)$ 中的 a 与 b 互换所得的方程，所以同样的计算给出

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{t_i^2} = \frac{2}{c^2}(b^2-a^2+r^2).$$

第 (iii) 部分

点 P_i 为 $(ct_i,\, c/t_i)$，所以 $OP_i^2 = c^2t_i^2 + \dfrac{c^2}{t_i^2}$。求和并利用第 (ii) 部分，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} OP_i^2 &= c^2\sum t_i^2 + c^2\sum \frac{1}{t_i^2} \\ &= 2(a^2-b^2+r^2) + 2(b^2-a^2+r^2) \\ &= 4r^2,\end{aligned}$$

这就是所求的结果。留意圆心 (a,b) 已完全消失。

第 (iv) 部分

? **想一想** 以 $(*)$ 的根而言，“相切”是甚么意思?

设 $f(t) = (ct-a)^2 + (c/t-b)^2 - r^2$，即动点到圆心距离的平方减去 r^2。曲线在参数 t_0 处与圆相切，当 $f(t_0) = 0$ 且 $f'(t_0) = 0$：该点在圆上，而且在一阶近似下，它与圆心的

距离没有改变，因此曲线在该处的方向垂直于半径，也就是圆的切线方向。（这里用到速度 $(c, -c/t^2)$ 永不为零这一事实。）$(*)$ 中的四次多项式就是 $t^2 f(t)$，而由于 $t_0 \neq 0$，f 在 t_0 有二重根当且仅当 $(*)$ 在 t_0 有二重根。

所以，若 C_1 与 C_2 在两个不同的点相切，其参数为 $\alpha \neq \beta$，则 α 和 β 都是 $(*)$ 的二重根。这已涵盖全部四个根，因此

$$c^2t^4 - 2act^3 + (a^2 + b^2 - r^2)t^2 - 2bct + c^2 = c^2(t-\alpha)^2(t-\beta)^2.$$

各根之积。比较常数项，$c^2\alpha^2\beta^2 = c^2$，所以 $(\alpha\beta)^2 = 1$，即 $\alpha\beta = \pm 1$。

各根之和。比较 t^3 项，$2(\alpha+\beta) = \dfrac{2a}{c}$，所以 $\alpha + \beta = \dfrac{a}{c}$。

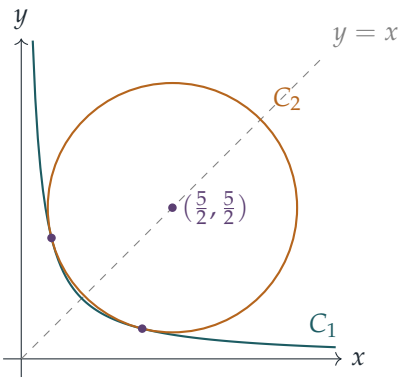
每三根之积的和。比较 t 项，$2\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{2b}{c}$，所以 $\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{b}{c}$。

把后两式相除（或把第二式代入第三式），得 $b = \alpha\beta\, a$。因此

$$\alpha\beta = 1 \implies b = a, \qquad \alpha\beta = -1 \implies b = -a,$$

所以圆心 (a, b) 位于 $y = x$ 或 $y = -x$ 上。（若 $a = 0$，则 $b = 0$，圆心为原点，同时位于两条直线上。）

下图展示 $c = 1$、$\alpha = 2$、$\beta = \frac{1}{2}$ 的情况。比较系数得 $a = b = \frac{5}{2}$ 及 $r^2 = \frac{17}{4}$，而圆与双曲线（hyperbola）相切于 $(2, \frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2}, 2)$。



验算

- 在第 (iii) 部分，取以原点为圆心的圆 $x^2 + y^2 = r^2$，并设 $c = 1$ 及 $r^2 > 2$。由对称性，四个交点为 $(p, q), (q, p), (-p, -q), (-q, -p)$，每点与原点的距离都是 r，所以总和确实是 $4r^2$。
- 在图中的例子里，$(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ 到 $(2, \frac{1}{2})$ 距离的平方为 $\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4} = 4.25$，正如所料。该处的半径方向 $(-\frac{1}{2}, -2)$ 与曲线方向 $(1, -\frac{1}{4})$ 互相垂直，证实了相切。

- 第 (ii) 部分的公式已用电脑对数千个随机的圆进行验证，方法是以数值方法解该四次方程。

常见错误

- 弄错 $\sum t_i t_j$ 的正负号。对于 $t^4 + pt^3 + qt^2 + \ldots$，各根之和是 $-p$，但两两之积的和是 $+q$。
- 在第 (iv) 部分只用了各根之积。这只给出 $\alpha\beta = \pm 1$，单凭这一点并不能说明 (a, b) 的任何性质。还需要再比较一个系数，才能把 a 和 b 引进来。
- 没有说明为何“相切”会给出二重根。理由是条件 $f(t_0) = f'(t_0) = 0$，连同 $t_0 \neq 0$。

STEP 之外

根与系数之间的关系就是初等对称函数（elementary symmetric functions）。一条经典定理指出，各根的任何对称多项式（symmetric polynomial），例如 $\sum t_i^2$ 或 $\sum t_i^{-2}$，都可以用系数表示。倒数代换 $u = 1/t$ 让我们初步窥见射影（projective）几何的思想；而一条圆锥曲线（conic）与一个圆最多相交于四点，这是关于平面曲线相交的贝祖定理（Bézout's theorem）的特例。如想进一步了解多项式及其根，可参阅 Allenby, *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）；如想多做这类风格的练习，可参阅 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。