详细解答

STEP II 2022，第 9 题

力学 · 摩擦力与力矩

STEP II 2022，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

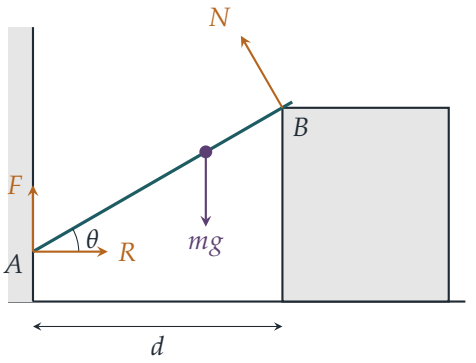
木板是轻的，所以只有三样东西作用于它：质点、棱柱边缘处的反作用力（reaction），以及墙壁。对木板与墙壁的接触点取力矩（moments），可以一次过消去墙壁的两个力，并立即得出边缘处的反作用力。然后沿铅垂方向分解（resolve）便得出摩擦力（friction），而之后每一部分都只是把摩擦不等式 $|F| \leq \mu R$ 重新整理而已。

解答

模型。木板是一根轻刚性杆，质量是一个重量为 mg 的质点，棱柱的边缘是光滑的，而墙壁是粗糙的，摩擦系数（coefficient of friction）为 μ。设 A 为木板与墙壁的接触点，B 为木板搁在边缘上的点。由于 B 与墙壁的水平距离为 d，

$$AB = d\sec\theta.$$

在 B 处木板搁在一条边缘上，所以光滑反作用力 N 垂直于木板。在 A 处，墙壁提供水平的法向反作用力 R 和铅垂的摩擦力 F，我们取向上为正（F 为负即表示它向下作用）。



对 A 取力矩。墙壁的两个力都通过 A。重量作用于沿木板距离 x 处，所以其力臂为 $x\cos\theta$；N 在距离 $d\sec\theta$ 处垂直于木板：

$$N\,d\sec\theta = mg\,x\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{mg\,x\cos^2\theta}{d}.$$

分解。N 的方向与铅垂线成角 θ，并向墙壁倾斜。沿水平及铅垂方向，

$$R = N\sin\theta = \frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d},$$
$$F = mg - N\cos\theta = mg\left(1 - \frac{x\cos^3\theta}{d}\right).$$

注意 $R > 0$，所以木板确实压在墙壁上。

第 (i) 部分

若 $x = d\sec^3\theta$，则 $x\cos^3\theta/d = 1$，所以 $F = 0$：墙壁处没有摩擦力作用。

第 (ii) 部分

在有摩擦的情况下，平衡（equilibrium）要求 $|F| \le \mu R$。

若 $x > d\sec^3\theta$，则 $x\cos^3\theta/d > 1$，所以 $F < 0$（摩擦力向下作用；没有它的话，端点 A 会沿墙壁向上滑）。条件 $-F \le \mu R$ 即为

$$mg\left(\frac{x\cos^3\theta}{d} - 1\right) \le \mu\,\frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d}.$$

乘以正数 $d\sec^3\theta/(mg)$，得

$$x - d\sec^3\theta \le \mu\,x\tan\theta, \qquad \text{因此} \qquad \mu \ge \frac{x - d\sec^3\theta}{x\tan\theta},$$

这里除以了 $x\tan\theta > 0$（因为 θ 是锐角）。这就是所求的结果。

若 $x < d\sec^3\theta$，则 $F > 0$，而条件 $F \le \mu R$ 同样地变成

$$\mu \ge \frac{d\sec^3\theta - x}{x\tan\theta}.$$

想一想 摩擦力向哪个方向作用？我们怎样不靠猜测就知道？

我们不需要猜。取 F 向上为正，铅垂方程便会告诉我们它的正负号。摩擦力总可以写成 $|F| \le \mu R$，而 F 的正负号只是决定我们得到两个不等式中的哪一个。

第 (iii) 部分

(ii) 的两种情况都是说 $|x - d\sec^3\theta| \le \mu x\tan\theta$，这等同于以下两式同时成立：

$$x - d\sec^3\theta \le \mu x\tan\theta \qquad 及 \qquad d\sec^3\theta - x \le \mu x\tan\theta.$$

第二式给出 $d\sec^3\theta \le x(1+\mu\tan\theta)$。由于 $1+\mu\tan\theta > 0$，

$$\frac{x}{d} \ge \frac{\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta}.$$

第一式给出 $x(1-\mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$。若 $\mu < \cot\theta$，则 $\mu\tan\theta < 1$，所以 $1-\mu\tan\theta > 0$，我们可以相除而不必反转不等号：

$$\frac{x}{d} \le \frac{\sec^3\theta}{1-\mu\tan\theta}.$$

（若 $\mu \ge \cot\theta$，则没有上界：无论质量位于木板上多高的位置，摩擦力都能把它承住。）

第 (iv) 部分

质量位于墙壁与边缘之间，当且仅当 $x < AB = d\sec\theta$。结合 (iii) 的下界，

$$\frac{d\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta} \le x < d\sec\theta.$$

除以 $d\sec\theta > 0$ 并乘以 $1+\mu\tan\theta > 0$，

$$\sec^2\theta < 1+\mu\tan\theta \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\theta < \mu\tan\theta,$$

这里用了 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$。由于 $\tan\theta > 0$，我们可以除以它，得 $\tan\theta < \mu$，正如所求。

验算

- 取 $\theta = 45°$、$d = 1$ 及 $\mu = 0.5$。则 $\sec^3\theta = 2\sqrt{2} \approx 2.83$，而 (iii) 容许 $1.89 \le x \le 5.66$。例如在 $x = 2$ 处，$F = mg(1-2/2\sqrt{2}) \approx 0.29mg$，$N = mg$，$R = mg/\sqrt{2}$，而

$\mu R \approx 0.35mg$，所以平衡成立。这时质量位于边缘之外（$AB = \sqrt{2}$），与 (iv) 一致，因为 $\tan 45^\circ = 1 > \mu$。

- 极限情况 $\mu = 0$（光滑墙壁）：(iii) 中的上下界收缩为 $x = d\sec^3\theta$，即 (i) 中唯一的位置。
- 以电脑对大量随机的 θ、d、μ 及 x 值进行检验，确认各力平衡（包括对其他点取力矩），并且 $|F| \le \mu R$ 成立当且仅当 (iii) 的不等式成立。

常见错误

- 把边缘处的反作用力当作铅垂。木板是搁在一条边缘上，所以光滑反作用力垂直于木板，而不是垂直于棱柱的顶面。
- 在力矩方程中，以 d 而非 $d\sec\theta$ 作为距离 AB。
- 把 $x(1 - \mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$ 相除时，没有检查 $1 - \mu\tan\theta$ 的正负号；这正是条件 $\mu < \cot\theta$ 出现的原因。

STEP 之外

这块木板是*静定的*（statically determinate）：三个未知反作用力，三条平衡方程，所以摩擦力被完全确定。若再加一个支点，方程便不再能确定各力；这时工程师会引入梁的弹性来决定负荷如何分配。(iii) 中的上下界是“平衡区域”的一个小例子，这个主题在稳定性的研究中会再次出现。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对刚体静力学和摩擦有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。