详细解答

STEP II 2022，第 8 题

纯数学 • 矩阵的不变直线

STEP II 2022，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

一条穿过原点的直线，如果线上每一点都被映射到同一条直线上的点，这条直线就是不变直线（invariant line）；因此只需看一个方向向量（direction vector）被映射到哪里便足够。把直线写成 $y = mx$，并要求 $\mathbf{M}\binom{1}{m}$ 是 $\binom{1}{m}$ 的倍数，整个问题就化为一个关于 m 的二次方程（quadratic equation）。之后，第 (ii) 和第 (iii) 部分都是关于这个方程两根之和与两根之积的问题；而铅垂线没有斜率（gradient），每次都需要另行处理。

解答

第 (i) 部分

考虑直线 $y = mx$，其方向为 $\binom{1}{m}$。它的像是

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+bm\\c+dm\end{pmatrix}.$$

由于 $\mathbf{M}$ 是线性（linear）的，这条直线是不变直线，当且仅当这个像位于 $y = mx$ 上，即当且仅当

$$c + dm = m(a + bm) \quad \Longleftrightarrow \quad bm^2 + (a-d)m - c = 0.$$

所以每条非铅垂的不变直线，其斜率都满足这个方程；而方程的每个根都给出一条不变直线。

在把斜率称为“两个根”之前，我们必须先确认这真的是一个二次方程。y 轴的方向为 $\binom{0}{1}$，其像为 $\binom{b}{d}$；这个像位于 y 轴上，当且仅当 $b = 0$。所以如果两条不变直线都不是 y 轴，则 $b \neq 0$。这时方程是真正的二次方程，最多只有两个根。两条不变直线都不是铅垂

线，而且斜率不同，所以它们的斜率是两个相异的根。这就表示它们的斜率正是方程的两个根，得证。

如果其中一条不变直线是 y 轴，则 $b = 0$，方程退化为 $(a-d)m - c = 0$。由于 $a \neq d$（这正是用到这个条件的地方），另一条不变直线的斜率是

$$m = \frac{c}{a-d}.$$

第 (ii) 部分

情况 $b \neq 0$。设两条直线的斜率为 m_1 和 m_2。由第 (i) 部分，

$$m_1 + m_2 = -\frac{a-d}{b}, \qquad m_1 m_2 = -\frac{c}{b}.$$

若两条直线与 x 轴所成的角分别为 α_1 和 α_2，则

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

两直线之间的夹角为 45°，即上式等于 ± 1，所以 $(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$。把左边写成 $(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2$，得

$$\frac{(a-d)^2}{b^2} + \frac{4c}{b} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2.$$

两边乘以 b^2，得 $(a-d)^2 + 4bc = (b-c)^2$，即

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 - 4bc.$$

情况 $b = 0$。其中一条直线是 y 轴，另一条的斜率为 $c/(a-d)$。要使它与 y 轴成 45°，它的斜率必须是 ± 1，所以 $c = \pm(a-d)$，从而 $(a-d)^2 = c^2$。当 $b = 0$ 时，所求结果的右边也等于 c^2，所以结果在这个情况下同样成立。

第 (iii) 部分

> ? **想一想** “与 $y = x$ 成相等的角”用斜率来说是甚么意思?

两条穿过原点的不同直线与 $y = x$ 成相等的角，当且仅当其中一条是另一条关于 $y = x$ 的镜像（mirror image）。关于 $y = x$ 的反射会把坐标对调，因此它把 $y = mx$ 映射到 $x = my$；当 $m \neq 0$ 时，这就是 $y = \frac{1}{m}x$。它把 x 轴映射到 y 轴，并把 y 轴映射到 x 轴。

情况 $b \neq 0$。两条直线都不是铅垂线。如果其中一条的斜率为 0，它的镜像便是 y 轴，而 y 轴并非不变直线，所以两条直线不会对称。除此以外，条件就是 $m_2 = 1/m_1$，即 $m_1 m_2 = 1$。由第 (i) 部分，这就是 $-c/b = 1$，即 $b + c = 0$。

情况 $b = 0$。其中一条直线是 y 轴，所以另一条必须是 x 轴：$c/(a-d) = 0$，即 $c = 0$。在 $b = 0$ 的前提下，这同样就是条件 $b + c = 0$。

所以在所有情况下，充要条件都是

$$b + c = 0, \quad \text{即} \quad c = -b.$$

（当矩阵是对称矩阵（symmetric matrix），即 $b = c$ 时，不变直线反而互相垂直。这里则是两个非对角元素互为相反数。）

第 (iv) 部分

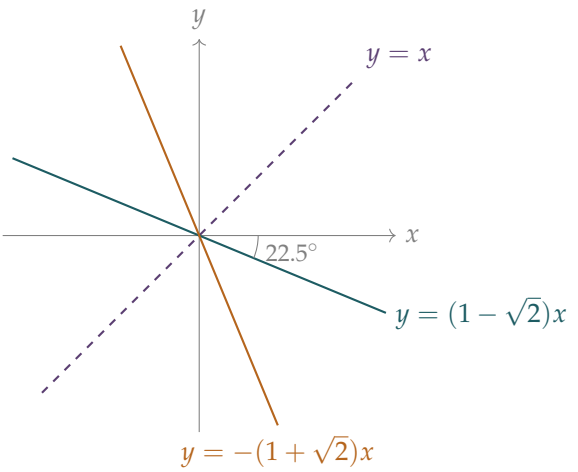
把 $c = -b$ 代入第 (ii) 部分的条件：

$$(a-d)^2 = (2b)^2 + 4b^2 = 8b^2.$$

我们需要 $b \neq 0$：若 $b = c = 0$，则 $(a-d)^2 = 0$，与 $a \neq d$ 矛盾。取 $b = 1$、$c = -1$ 及 $a - d = 2\sqrt{2}$，例如 $a = \sqrt{2}$、$d = -\sqrt{2}$：

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

第 (i) 部分的二次方程是 $m^2 + 2\sqrt{2}\,m + 1 = 0$，有相异实根 $m = -\sqrt{2} \pm 1$。所以这个矩阵恰好有两条不变直线，与题目的假设相符。两根之积为 1，所以两条直线关于 $y = x$ 互为镜像。由于 $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$ 及 $\tan 67.5^\circ = \sqrt{2} + 1$，它们与 x 轴所成的角分别为 -22.5° 和 -67.5°。因此两条直线相交成 45°，而每条都与 $y = x$ 成 67.5°。



验算

- 对于第 (iv) 部分的例子，$(a-d)^2=8$，而 $(b-c)^2-4bc=4+4=8$，所以第 (ii) 部分的条件成立。我们也可以直接验证其中一条直线：$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\\-1-\sqrt{2}+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$，所以 $y=(1-\sqrt{2})x$ 上的每一点其实都是不动点。
- 第 (i) 部分的一个简单特例：对于 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$，不变直线就是两条坐标轴。$y$ 轴情况的公式给出另一条直线的斜率为 $0/(2-1)=0$，正确无误。
- 第 (i) 至 (iii) 部分已用电脑以数以千计的随机矩阵验证：特征向量的方向满足该二次方程，成 45° 的直线对满足该恒等式，而且两条直线关于 $y=x$ 对称，当且仅当 $b+c=0$。

常见错误

- 忘记铅垂线。二次方程只能反映斜率，所以每一部分都必须另行处理 $b=0$ 的情况。
- 在第 (iii) 部分写成 $m_1=-m_2$。这是关于坐标轴的对称。关于 $y=x$ 的对称需要 $m_1m_2=1$。
- 使用 $\tan\theta=1$ 而漏掉 $\pm$。把式子平方成 $(m_1-m_2)^2=(1+m_1m_2)^2$，便可同时处理两个符号。

STEP 之外

穿过原点的不变直线，就是 $\mathbf{M}$ 的特征向量（eigenvector）方向；而第 (i) 部分的二次方程，就是把特征向量方程 $\mathbf{Mv}=\lambda\mathbf{v}$ 中的 λ 消去后所得的结果。实对称矩阵的特征向量必定互相垂直（谱定理（spectral theorem））。这道题则展示了反对称的非对角元素如何令特征向量反而关于 $y=x$ 对称。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）对特征向量和谱定理有系统的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。