详细解答

STEP II 2022，第 7 题

纯数学 · 复系数多项式的根

STEP II 2022，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

方程 $\mathrm{h}(w) = 0$ 可以很自然地写成 $w^5(nw+1) = -(w+n)$，两边取模（modulus）后，就变成一个只关于 $|w|$ 的命题。一旦知道所有根都在单位圆（unit circle）上，每个非实根都会与它的共轭（conjugate）配成一对，而这个共轭恰好也是它的倒数（reciprocal）。由此便得到二次因式（quadratic factor），之后只需比较系数（comparing coefficients），再作一个正负号的论证即可。

解答

第 (i) 部分

(a) 把 $\mathrm{h}(w) = 0$ 的各项分组为

$$w^5(nw+1) = -(w+n).$$

两个括号都不可能为零。若 $w = -1/n$，则 $\mathrm{h}(w) = n - \frac{1}{n} \neq 0$；若 $w = -n$，则 $\mathrm{h}(w) = n^5(n^2-1) \neq 0$，因为 $n \geq 2$。两边取模再平方，得

$$|w^5|^2\,|nw+1|^2 = |w+n|^2.$$

对任何复数 u 及实数 c，有 $|u+c|^2 = (u+c)(\bar{u}+c) = |u|^2 + 2c\,\mathrm{Re}(u) + c^2$。所以

$$|w+n|^2 = |w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + n^2 = \mathrm{f}(w),$$
$$|nw+1|^2 = n^2|w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + 1 = \mathrm{g}(w).$$

两者皆为正，故 $|w^5|^2 = \mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)$。取正平方根，便得 $|w^5| = \sqrt{\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)}$，即为所求。

(b) 两者相减时，$\mathrm{Re}(w)$ 项互相抵消：

$$\mathrm{f}(w) - \mathrm{g}(w) = n^2 + |w|^2 - n^2|w|^2 - 1 = (n^2-1)(1-|w|^2).$$

用反证法（proof by contradiction），假设 $|w| < 1$。由于 $n^2 - 1 > 0$，得 $\mathrm{f}(w) > \mathrm{g}(w) > 0$，所以 $\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w) > 1$。由 (a)，$|w|^5 > 1$，故 $|w| > 1$，与 $|w| < 1$ 矛盾。因此 $|w| \geq 1$。

(c) 同样的论证反过来亦成立。若 $|w| > 1$，则 $\mathrm{f}(w) < \mathrm{g}(w)$，所以 $|w|^5 < 1$，即 $|w| < 1$，矛盾。故 $|w| \leq 1$ 亦成立，结合 (b)，得 $|w| = 1$。

想一想 有没有更简洁的理由说明 $|w| \leq 1$?

有的。系数 $n, 1, 0, 0, 0, 1, n$ 倒过来读也一样，所以 $z^6\,\mathrm{h}(1/z) = \mathrm{h}(z)$。因此若 w 是根，$1/w$ 也是根；把 (b) 应用于 $1/w$，便得 $|w| \leq 1$。

第 (ii) 部分

(a) 由于 h 是实系数（real coefficients）多项式，它的非实根必成共轭对出现。六个根互不相同且都不是实数，所以它们组成三对 w_k, $\bar{w}_k$（$k = 1, 2, 3$）。由第 (i) 部分，$|w_k| = 1$，故 $w_k\bar{w}_k = 1$，而

$$(z - w_k)(z - \bar{w}_k) = z^2 - (w_k + \bar{w}_k)z + w_k\bar{w}_k = z^2 - a_k z + 1,$$

其中 $a_k = 2\,\mathrm{Re}(w_k)$ 为实数。多项式 h 的次数（degree）为 6，首项系数（leading coefficient）为 n，所以

$$\mathrm{h}(z) = n(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1)(z^2 - a_3 z + 1).$$

(b) 乘积中的 z^5 项，来自从其中一个因式取 $-a_k z$、从另外两个因式各取 z^2，所以 z^5 的系数是 $-n(a_1 + a_2 + a_3)$。在 h 中这个系数是 1，所以

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{n}.$$

(c) 先把其中两个因式相乘：

$$(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1) = z^4 - (a_1 + a_2)z^3 + (2 + a_1 a_2)z^2 - (a_1 + a_2)z + 1.$$

再乘以 $z^2 - a_3 z + 1$，z^3 项来自 $z^3 \times 1$、$z^2 \times (-a_3 z)$ 及 $z \times z^2$：

$$-(a_1 + a_2) - a_3(2 + a_1 a_2) - (a_1 + a_2) = -2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a_2 a_3.$$

h 中没有 z^3 项，所以 $a_1 a_2 a_3 = -2(a_1 + a_2 + a_3)$，再由 (b)，

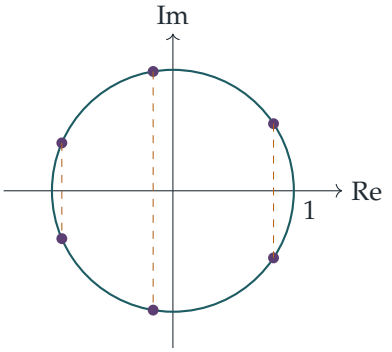
$$a_1 a_2 a_3 = \frac{2}{n}.$$

(d)

想一想 a_k 的正负号能告诉我们甚么关于实部的信息?

每对共轭根 $w_k, \bar{w}_k$ 有相同的实部（real part）$\mathrm{Re}(w_k) = a_k/2$。所以实部为负的根的数目，是负数 a_k 的数目的两倍。

由于 $a_1a_2a_3 = 2/n > 0$，所有 a_k 都不为零，而且其中负数的个数是偶数：零个或两个。它们不可能全部为正，因为 $a_1 + a_2 + a_3 = -1/n < 0$。所以恰好有两个 a_k 为负、一个为正，六个根之中有**四个**的实部为负。



上图显示 $n = 2$ 的情况。六个根以三对共轭根的形式落在单位圆上，其中两对位于虚轴（imaginary axis）的左边。

验算

- 作为“没有实根”的合理性检查：$\mathrm{h}(1) = 2n + 2$ 和 $\mathrm{h}(-1) = 2n - 2$ 都不为零。由于所有根都在单位圆上，唯一可能的实根只有 ± 1。
- 当 $n = 2$ 时，数值求解得 $a_k \approx -1.8368,\ -0.3272,\ 1.6640$。它们之和为 $-0.5 = -\frac{1}{2}$，乘积为 $1.000 = \frac{2}{2}$，且有两个为负，与 (b)、(c)、(d) 相符。以电脑检验 $n = 2, \ldots, 29$，确认每次所有根的模都是 1，而且都有四个根的实部为负。

常见错误

- 未检查 $w = -1/n$ 不是根，便直接除以 $nw + 1$。
- 在 (c) 中漏掉构成 z^3 的三种方式之一，特别是来自 $2 + a_1a_2$ 中常数 2 的那一项 $-2a_3$。
- 在 (d) 中数了负数 a_k 的个数，却忘记每一个都对应两个根。

STEP 之外

系数倒过来读也一样的多项式称为回文多项式（palindromic polynomial，又称自倒多项式，self-reciprocal）。它的根以 $w, 1/w$ 成对出现，而代换 $u = z + 1/z$ 可以把它的次数减半。这里的 $a_k = w_k + 1/w_k$ 正正就是这个 u。探讨所有根何时都落在单位圆上的问题，会引出 Schur–Cohn 判别法，以及复分析（complex analysis）中的儒歇定理（Rouché's theorem）等结果。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是从几何角度欣赏这些概念的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。