详细解答

STEP II 2022，第 6 题

纯数学 · 正交轨线

> **STEP II 2022，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

两条曲线在某点互相垂直，当且仅当它们在该点的斜率（gradient）之积为 -1。因此，对于一整族曲线，我们需要一条在点 (x,y) 成立的斜率公式，而且无论族中哪一条曲线经过该点都适用。这意味着要在曲线方程与其导数（derivative）之间消去参数（parameter）（a、b、c 或 k），只剩下一条只含 x、y 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的微分方程（differential equation）。然后把斜率 m 换成 $-1/m$ 再求解，便得到与之垂直的曲线族。

解答

全题中 $x>0$ 且 $y>0$。

第 (i)(a) 部分

把 $x^2+y^2=2ax$ 对 x 作隐函数微分（implicit differentiation），得

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2a.$$

这式子仍然含有 a，而 a 随曲线而变。由曲线方程得 $2a=(x^2+y^2)/x$，代入后乘以 x，

$$2x^2+2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2 \quad\Longrightarrow\quad 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2-x^2,$$

即所求。

对于第二族，把 $x^2+y^2=2by$ 微分（记住右方亦通过 y 依赖于 x），得

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

此时 $2b = (x^2+y^2)/y$；代入后乘以 y，

$$2xy + 2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad\Longrightarrow\quad (x^2-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy.$$

第 (i)(b) 部分

假设两族中各有一条曲线经过 (x,y)，且 $y \neq x$。由于 $x, y > 0$，故 $2xy \neq 0$；又因 $y \neq x$ 且两者皆为正，故 $x^2 - y^2 \neq 0$。因此两条微分方程都可以相除：两个斜率为

$$m_1 = \frac{y^2-x^2}{2xy}, \qquad m_2 = \frac{2xy}{x^2-y^2}, \qquad \text{故} \qquad m_1 m_2 = \frac{y^2-x^2}{x^2-y^2} = -1.$$

两个斜率都是有限值，且乘积为 -1，所以两条切线（tangent）互相垂直。

> ? **想一想** 在直线 $y = x$ 上会出现甚么问题？这是否表示结果在那里不成立？

在 $y = x$ 上，第二条方程变成 $0 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x^2 \neq 0$，没有任何有限斜率能满足它：第二条曲线的切线是铅垂的。出问题的是代数，而不是几何，所以我们直接考察。

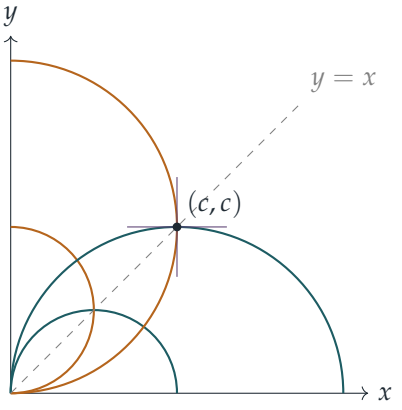
若 (c,c) 在 $x^2+y^2 = 2ax$ 上，则 $2c^2 = 2ac$，故 $a = c$；同理 $b = c$。第一条曲线是圆心 $(c,0)$、半径 c 的圆，而 (c,c) 是它的最高点，所以该点的切线是水平的（事实上当 $y = x$ 时 $m_1 = 0$）：

$$y = c.$$

第二条曲线是圆心 $(0,c)$、半径 c 的圆，而 (c,c) 是它的最右点，所以其切线是铅垂的：

$$x = c.$$

水平线与铅垂线互相垂直，所以**是的**：在每一个交点，包括 $y = x$ 上的交点，切线都互相垂直。



第一族的圆（青绿色）在原点与 y 轴相切；第二族的圆（琥珀色）在原点与 x 轴相切。

第 (ii) 部分

对于 $y = c\ln x$，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c}{x}$。为了消去 c，注意在这类曲线上位于第一象限的点，$y > 0$ 迫使 $\ln x \neq 0$，故 $c = y/\ln x$，且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x\ln x}.$$

这个斜率永不为零，所以经过同一点的垂直曲线的斜率必为 $-x\ln x/y$。因此第二族满足

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x\ln x.$$

分离变量（separating variables），并以 $u = \ln x$、$\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$ 对 $x\ln x$ 作分部积分（integration by parts），

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2\ln x + \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

乘以 4，第二族为

$$2y^2 + 2x^2\ln x - x^2 = k,$$

每个常数 k 对应一条曲线（只计 $x > 0$、$y > 0$ 的部分）。反过来，对此式作隐函数微分，得 $4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4x\ln x + 2x - 2x = 0$，正是上面的方程，所以凡这些曲线与某条 $y = c\ln x$ 相交之处，斜率之积都是 $\frac{y}{x\ln x}\cdot\frac{-x\ln x}{y} = -1$。

第 (iii) 部分

把 $y^2 = 4k(x+k)$ 微分，得 $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4k$，由于 $y > 0$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2k}{y}.$$

想一想 这里只有一族曲线。那么“第二条曲线”从何而来?

固定第一象限中一点 (x, y)，问族中哪些曲线经过它。k 的值必须满足

$$4k^2 + 4xk - y^2 = 0,$$

这是 k 的二次方程（quadratic）。其判别式（discriminant）$16x^2 + 16y^2$ 为正，所以有两个相异实根 k_1、k_2，而它们的积为

$$k_1k_2 = -\frac{y^2}{4}.$$

（此值为负，所以两根皆非零，符合曲线族的要求。）二次方程最多只有两个根，所以若族中两条不同的曲线在 (x, y) 相交，它们的参数必定正是 k_1 和 k_2。它们在该点的斜率为 $2k_1/y$ 和 $2k_2/y$，乘积为

$$\frac{4k_1k_2}{y^2} = \frac{4}{y^2}\cdot\left(-\frac{y^2}{4}\right) = -1.$$

所以在每一个这样的点，切线都互相垂直，即所求。（这些曲线是焦点（focus）在原点的抛物线（parabola）；这族曲线就是它自己的正交轨线。）

验算

- 在 (i) 中，取 $(x,y)=(1,2)$：则 $a=\frac{5}{2}$、$b=\frac{5}{4}$，斜率为 $m_1=\frac{3}{4}$ 和 $m_2=-\frac{4}{3}$，乘积为 -1。
- 在 (ii) 中，在 $(e,1)$ 处，对数曲线有 $c=1$，斜率为 $1/e$；第二族的公式给出斜率 $-e\cdot 1/1=-e$。乘积同样是 -1。
- 在 (iii) 中，在 $(0,2)$ 处，二次方程为 $4k^2-4=0$，故 $k=\pm 1$：抛物线 $y^2=4(x+1)$ 和 $y^2=-4(x-1)$，在该点的斜率分别为 1 和 -1。
- 四个结果亦已用电脑在数千个随机点上验证，所用的是曲线本身的数值导数。

常见错误

- 微分 $2by$ 时漏掉右方的因子 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。
- 在 (ii) 中，把垂直斜率写成 $-x/c$，然后在仍含 c 的情况下积分：c 属于第一条曲线，必须在求解前消去。
- 在 (i)(b) 中除以 x^2-y^2 而没有说明它为何非零，因而忽略了直线 $y=x$ 需要另行处理。

STEP 之外

处处以直角相交的曲线族称为**正交轨线**（orthogonal trajectories）。它们在物理学中以场线和等势线的形式出现，在复分析（complex analysis）中亦然：解析函数（analytic function）的实部与虚部的等高线总是互相垂直，这就是为甚么 (i) 中的圆来自 $1/z$，而 (iii) 中自身正交的抛物线来自 $\sqrt{z}$。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讨论了正交轨线，而 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）则把复分析的图像解释得精彩动人。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。