详细解答

STEP II 2022，第 5 题

纯数学 · 三角形中的不等式

STEP II 2022，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

从 P 把三角形分成三块，便可看出无论 P 怎样移动，加权和（weighted sum）$ax+by+cz$ 始终固定为 2Δ。之后每一部分都是在这个单一线性约束（linear constraint）下的最优化（optimisation）问题。第 (i) 部分把 $x+y+z$ 与这个固定量作比较；(iii)(a) 的恒等式（identity）对 $x^2+y^2+z^2$ 做同样的事（它其实是乔装了的柯西－施瓦茨不等式（Cauchy–Schwarz inequality））；至于最大值，我们把 (i) 反过来用，以 c 代替 a。

解答

第 (i) 部分

由于 $a>b$ 且 $y\geq 0$，得 $by\leq ay$；由于 $a>c$ 且 $z\geq 0$，得 $cz\leq az$。把两式相加，再在两边加上 ax，得

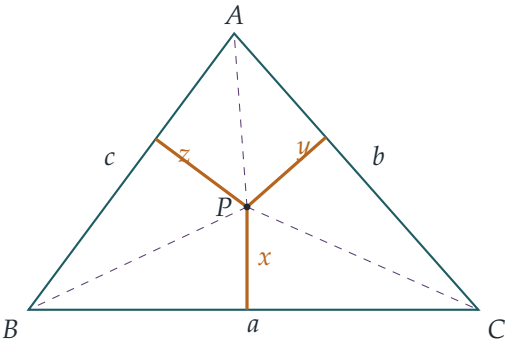
$$ax+by+cz\leq ax+ay+az=a(x+y+z),$$

此即所求。因为 $a-b>0$ 及 $a-c>0$，等号成立当且仅当 $(a-b)y+(a-c)z=0$，即 $y=z=0$。稍后我们会用到这个等号成立的情况。

第 (ii)(a) 部分

把 P 与各顶点连起来，便把 ABC 分成三角形 PBC、PCA 和 PAB（若 P 在某条边上，其中一些可能是退化（degenerate）的）。三角形 PBC 的底为 $BC=a$，高为 x，其余依此类推，所以

$$\Delta=\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{2}by+\tfrac{1}{2}cz, \qquad \text{即} \qquad ax+by+cz=2\Delta.$$



反过来，任何满足 $ax+by+cz=2\Delta$ 的 $x,y,z\geq 0$，都恰好是三角形内（或边上）唯一一点 P 到三边的距离：三个三角形的面积 $\frac{1}{2}ax$、$\frac{1}{2}by$、$\frac{1}{2}cz$ 都非负，总和为 Δ，而它们唯一确定 P（它们就是 P 的面积坐标（areal coordinates））。因此，下文可以把问题当作纯代数问题处理：在所有满足 $ax+by+cz=2\Delta$ 的非负 x,y,z 中求最优值。

第 (ii)(b) 部分

依次用第 (i) 部分和 (ii)(a)，

$$x+y+z\geq \frac{ax+by+cz}{a}=\frac{2\Delta}{a}.$$

等号成立当且仅当 $y=z=0$，此时 $ax=2\Delta$。所以总和的最小值为

$$x+y+z=\frac{2\Delta}{a},\qquad \text{取得于}\quad x=\frac{2\Delta}{a},\ y=0,\ z=0.$$

从几何角度看，$y=z=0$ 表示 P 同时在 CA 和 AB 上，所以 $P=A$，而 x 就是从 A 到最长边 BC 的高（altitude）。

第 (iii)(a) 部分

展开三个差的平方，

$$\begin{aligned}(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2 &= b^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+b^2z^2+a^2z^2+c^2x^2\\ &\quad -2(abxy+bcyz+cazx),\end{aligned}$$

而

$$(ax+by+cz)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+bcyz+cazx).$$

两式相加，交叉项互相抵消，而 a^2,b^2,c^2 其中之一与 x^2,y^2,z^2 其中之一的每个乘积都恰好出现一次，得 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$。这就证明了此恒等式对所有实数值皆成立。

第 (iii)(b) 部分

把 $ax+by+cz=2\Delta$ 代入恒等式：

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+4\Delta^2\geq 4\Delta^2,$$

因为平方数非负。因此

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

> **想一想** 下界只有在真正能取到时才是最小值。三个平方项能否在一个真实存在的点 P 同时为零?

等号成立需要 $bx=ay$、$cy=bz$ 及 $az=cx$。这些条件表示 (x,y,z) 是 (a,b,c) 的倍数：若 $x=\lambda a$, 则 $y=\frac{b}{a}x=\lambda b$, $z=\frac{c}{a}x=\lambda c$, 三条方程都成立。由约束条件得 $\lambda(a^2+b^2+c^2)=2\Delta$，所以 $\lambda=\dfrac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}>0$。于是 x,y,z 全为正数，且满足 $ax+by+cz=2\Delta$，故根据 (ii)(a) 的说明，它们对应一个真实的点 P（严格位于三角形内部）。所以平方和的最小值为

$$\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2},\qquad\text{取得于}\quad x=\frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ y=\frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ z=\frac{2c\Delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

第 (iv) 部分

> **想一想** 第 (i) 部分用到 a 是最长边。如果改用最短边 c，会怎样?

由于 $a>c$、$b>c$ 且 $x,y\geq 0$, 把第 (i) 部分的论证反过来, 得 $ax+by+cz\geq c(x+y+z)$, 等号成立当且仅当 $x=y=0$。所以

$$x+y+z\leq\frac{2\Delta}{c}.$$

此外，由于 $x,y,z\geq 0$,

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\leq(x+y+z)^2,$$

等号成立当且仅当 $xy+yz+zx=0$。把两者结合（由于两边都非负，平方是安全的），

$$x^2+y^2+z^2\leq(x+y+z)^2\leq\frac{4\Delta^2}{c^2}.$$

当 $x=y=0$ 时，两个不等式都取等号：此时 $xy+yz+zx=0$ 且 $cz=2\Delta$。所以平方和的最大值为

$$\frac{4\Delta^2}{c^2},\qquad\text{取得于}\quad x=0,\ y=0,\ z=\frac{2\Delta}{c},$$

即 $P=C$，也就是最短边所对的顶点。（第二个不等式只在 $x=y=0$ 时取等号，所以这是取得最大值的唯一一点。）

验算

取边长为 $a = 7$、$b = 6$、$c = 5$ 的锐角三角形。海伦公式（Heron's formula）给出 $\Delta = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6} \approx 14.70$。答案于是为：$x + y + z$ 的最小值是 $12\sqrt{6}/7 \approx 4.20$；$x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值是 $864/110 = 432/55 \approx 7.85$；最大值是 $864/25 = 34.56$。大小次序合理：在 $P = C$ 时，平方和就是从 C 出发的高的平方，即 $(12\sqrt{6}/5)^2 = 34.56$。我们用电脑检验了大量随机锐角三角形，每个三角形取数以千计的随机点 P，证实了 $ax + by + cz = 2\Delta$ 及全部三个界，而极值分别在 A、在距离与 (a, b, c) 成比例的点，以及在 C 取得。

常见错误

- 给出下界却没有证明它能取到。在 (iii)(b) 中，必须检查等号成立的点的距离非负且满足约束条件，才能确定它是一个真实存在的 P。
- 混淆顶点：$x + y + z$ 的最小值在 A（最长边所对的顶点）取得，但 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最大值在 C（最短边所对的顶点）取得。
- 在 (iv) 中忽略条件 $x, y, z \geq 0$；没有这个条件，$x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2$ 并不成立。

STEP 之外

(iii)(a) 中的恒等式是拉格朗日恒等式（Lagrange's identity），它证明了三维空间中的柯西－施瓦茨不等式 $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2$：最小值点就是 (x, y, z) 与 (a, b, c) 平行之处，亦即从原点到平面 $ax + by + cz = 2\Delta$ 的垂足。像 $x^2 + y^2 + z^2$ 这样的凸函数（convex function）在三角形上的最大值总是在某个顶点取得，这让我们初窥线性最优化与凸最优化的世界。(iii)(b) 中找到的点是三角形的类似重心（symmedian point，又称勒穆瓦纳点（Lemoine point））。想进一步了解点积与投影，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。