详细解答

STEP II 2022，第 4 题

纯数学 · 绝对值函数

STEP II 2022，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

绝对值符号（modulus sign）只在其内部式子变号之处才起作用，因此在每两个这样的点之间的区间上，每个绝对值都可以换成其内部式子的正号或负号形式。反过来看，一项 $A|x-p|$ 会在 $x=p$ 处造成一个转角，该处的斜率（gradient）跳变 $2A$。因此，要写出单一公式，我们先配合斜率的跳变（在最后一部分还要配合 x^2 系数（coefficient）的跳变），然后再定出常数。

解答

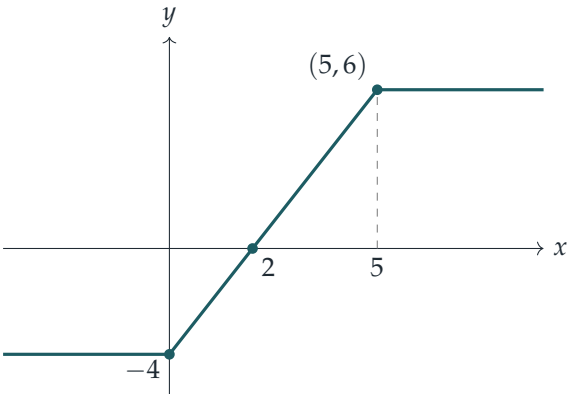
第 (i) 部分

临界点是 $x=0$（$|x|$ 在此转换）和 $x=5$（$|x-5|$ 在此转换）。

- 当 $x \le 0$: $|x| = -x$, 而由于 $x-5<0$, $|x-5| = 5-x$。所以 $f(x) = -x-(5-x)+1 = -4$。
- 当 $0 \le x \le 5$: $|x| = x$ 及 $|x-5| = 5-x$。所以 $f(x) = x-(5-x)+1 = 2x-4$。
- 当 $x \ge 5$: $|x| = x$ 及 $|x-5| = x-5$。所以 $f(x) = x-(x-5)+1 = 6$。

在 $x=0$ 和 $x=5$ 处，相关的两个表达式都成立（每个绝对值在该处要么为零，要么符号确定），所以重叠的端点是一致的：$-4 = 2(0)-4$ 及 $2(5)-4 = 6$。这就是所求的分段（piecewise）形式。

图像先是高度为 -4 的水平线，然后以斜率 2 从 $(0,-4)$ 经 $(2,0)$ 上升至 $(5,6)$，之后是高度为 6 的水平线。



第 (ii) 部分

第 (i) 部分启发我们尝试

$$\mathrm{g}(x) = A|x| + B|x-5| + Cx + D.$$

由左至右经过 $x = 0$ 时，$A|x|$ 一项由 $-Ax$ 变为 Ax，所以斜率跳变 $2A$；同理，$B|x-5|$ 令斜率在 $x = 5$ 处跳变 $2B$。已知的 g 在三段上的斜率分别是 -1、3、1，所以

$$2A = 3 - (-1) = 4, \qquad 2B = 1 - 3 = -2,$$

得 $A = 2$、$B = -1$。当 $x \geq 5$ 时，公式为 $2x - (x-5) + Cx + D = (1+C)x + 5 + D$，而这必须等于 $x + 10$，所以 $C = 0$ 及 $D = 5$。因此

$$\boxed{\mathrm{g}(x) = 2|x| - |x-5| + 5.}$$

验算其余两段：当 $x \leq 0$，$-2x - (5-x) + 5 = -x$；当 $0 \leq x \leq 5$，$2x - (5-x) + 5 = 3x$。两者都与 g 的定义相符。

想一想 为甚么这种形式的公式有机会成功?

g 的每一段都是线性的，而且各段连续（continuous）地接合（在 $x = 0$ 处两侧都是 0，在 $x = 5$ 处两侧都是 15）。由线性式的绝对值之和加上一个线性函数所组成的函数，必定是连续且分段线性的，而转角只出现在各绝对值转换之处。假如 g 有跳跃，就没有这样的公式能产生它。

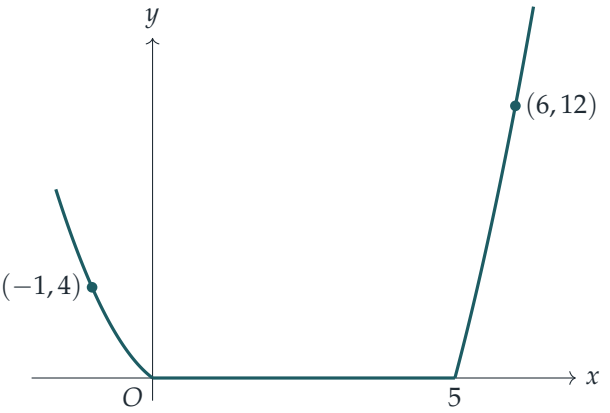
第 (iii) 部分

现在转换点是 $x = 0$（对应 $|x|$）以及 $x(x-5)$ 的根，即同样是 0 和 5。乘积 $x(x-5)$ 在 $x < 0$ 及 $x > 5$ 时为正，在两者之间为负。

▶ 当 $x \leq 0$：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x + 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$。

- 当 $0 \le x \le 5$：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x - (x^2 - 5x) = 0$。
- 当 $x \ge 5$：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 10x = 2x(x-5)$。

所以 h 在 $[0,5]$ 上恒等于零。在左边，它是抛物线（parabola）$y = 2x(x-1)$ 的一部分：它以斜率 $4x - 2 = -2$ 到达原点，并在 $x \to -\infty$ 时无界地增大（例如 $\mathrm{h}(-1) = 4$）。在右边，它是 $y = 2x(x-5)$ 的一部分：它以斜率 $4x - 10 = 10$ 离开 $(5,0)$（例如 $\mathrm{h}(6) = 12$）。两臂并非互为镜像：右臂离开横轴时陡峭五倍。图像是连续的，在 $(0,0)$ 和 $(5,0)$ 处有转角，而且处处 $\mathrm{h}(x) \ge 0$。



第 (iv) 部分

第 (iii) 部分展示了我们需要的工具：$|x(x-5)|$ 在 $[0,5]$ 以外等于 $x^2 - 5x$，在其内则等于 $-(x^2 - 5x)$，所以它可以把一个 x^2 项“开启”和“关闭”。函数 k 的 x^2 系数在 $[0,5]$ 以外为 0，在其内为 2。在 $ax^2 + d|x(x-5)|$ 中，x^2 的系数在外面是 $a + d$，在里面是 $a - d$，所以我们需要 $a + d = 0$ 及 $a - d = 2$，即 $a = 1$、$d = -1$。于是 $x^2 - |x(x-5)|$ 具有正确的二次项表现，而且

$$x^2 - |x(x-5)| = \begin{cases} 5x & x \le 0 \text{ 或} x \ge 5, \\ 2x^2 - 5x & 0 \le x \le 5. \end{cases}$$

从 k 减去此式，剩下一个分段线性的余下部分：

$$\mathrm{k}(x) - \left(x^2 - |x(x-5)|\right) = \begin{cases} 5x & x \le 5, \\ 50 - 5x & x \ge 5. \end{cases}$$

它只在 $x = 5$ 处有一个转角，该处斜率由 5 跳变为 -5，即跳变 -10；所以它是 $-5|x-5|$ + (线性函数)。当 $x \le 5$ 时，$-5|x-5| = 5x - 25$，所以要加上 25 才得到 $5x$。这启发我们得出

$$\boxed{\mathrm{k}(x) = x^2 - |x(x-5)| - 5|x-5| + 25.}$$

验证。我们在每个区间上代入。

- 当 $x \le 0$：$x(x-5) \ge 0$ 且 $x-5 < 0$，所以公式给出 $x^2 - (x^2-5x) - 5(5-x) + 25 = 5x + 5x = 10x$。
- 当 $0 \le x \le 5$：$x(x-5) \le 0$ 且 $x-5 \le 0$，所以它给出 $x^2 + (x^2-5x) - 5(5-x) + 25 = 2x^2$。
- 当 $x \ge 5$：$x(x-5) \ge 0$ 且 $x-5 \ge 0$，所以它给出 $x^2 - (x^2-5x) - 5(x-5) + 25 = 50$。

这些正正就是 k 的三段，所以该公式对每个实数 x 都正确。

这个单一公式并非唯一。例如 $|x(x-5)| = |x|\,|x-5|$，所以答案可以改写，而其他组合（例如用到 $x|x|$ 的）也同样可行。任何答案只要通过上述三个区间的检验，都是可以接受的。

验算

- 代入数值：由定义及 $2(2) - 7 + 5$ 均得 $\mathrm{g}(-2) = 2$；$\mathrm{g}(7) = 17 = 14 - 2 + 5$。至于 k：$\mathrm{k}(3) = 18$ 而 $9 - |-6| - 10 + 25 = 18$；$\mathrm{k}(-1) = -10$ 而 $1 - 6 - 30 + 25 = -10$。
- 连续性是一个快捷的合理性检查：任何由绝对值构成的单一公式都是连续的，而 g 和 k 在接合点确实吻合（$\mathrm{k}(5) = 50 = 2 \cdot 5^2$）。
- 四条公式都已用电脑在 $[-20, 25]$ 中 10^5 个随机点上与其分段形式比较，结果在舍入误差范围内一致。

常见错误

- 把 h 的两臂画成对称。左臂是 $2x(x-1)$，右臂是 $2x(x-5)$，在转角处的斜率分别是 -2 和 10。
- 忘记 $|x(x-5)|$ 在两个点变号，所以在 (iii) 中它在中间的区间翻转，而不只是在 0 处。
- 写出 k 的公式后没有代入全部三个区间验证；验证是必需的。

STEP 之外

这里追踪斜率跳变的做法，让我们初尝一个一般事实：$\mathbb{R}$ 上每个只有有限个转角的连续分段线性函数，都是一个线性函数加上若干 $|x-p|$ 项的组合。这正是数值分析（numerical analysis）中线性样条（linear splines）以及神经网络（neural networks）中“ReLU”单元背后的概念，因为 $\max(x, 0) = \frac{1}{2}(x + |x|)$。若想仔细了解连续性及分段定义的函数，可

参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。