详细解答

STEP II 2022，第 3 题

纯数学 · 斐波那契级数与小数

> **STEP II 2022，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2022 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

关键思路

递推关系（recurrence）$F_{r+1} - F_r - F_{r-1} = 0$ 是整道题的核心。把它乘以 $\frac{1}{10}$ 的幂再求和，然后重新编排下标（re-indexing），每一部分都会变成 S_n 的倍数加上几个边界项，这正是生成函数（generating function）的技巧。第 (i) 部分是安全网：它说明斐波那契数（Fibonacci numbers）的增长不会快过 2 的幂，所以除以 10（或 100）的幂之后，尾项（tail）非常小，很容易估计上界。

解答

第 (i) 部分

首先，每个 $F_k \geq 0$（用归纳法（induction）证明：因为 $F_0, F_1 \geq 0$，而非负数之和仍是非负数）。其次，这个数列从不递减：$F_1 \geq F_0$，而对 $k \geq 1$，有 $F_{k+1} - F_k = F_{k-1} \geq 0$。

所以对每个 $k \geq 1$，

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq F_k + F_k = 2F_k.$$

现在固定 $n \geq 1$，对 $r \geq n$ 进行归纳。当 $r = n$ 时，命题变成 $F_n \leq F_n$。若对某个 $r \geq n$ 有 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$，则由于 $r \geq 1$，

$$F_{r+1} \leq 2F_r \leq 2 \cdot 2^{r-n}F_n = 2^{(r+1)-n}F_n.$$

归纳完成，所以只要 $n \geq 1$ 且 $r \geq n$，便有 $F_r \leq 2^{r-n}F_n$。

第 (ii) 部分

我们把左边三个和各自用 S_n 表示。

第一个和。设 $k = r+1$：

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r+1}}{10^{r-1}} = 100 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{F_k}{10^k} = 100\Big(S_n - \frac{F_1}{10} + \frac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\Big)$$
$$= 100S_n - 10F_1 + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}.$$

第二个和。这就是 $10S_n$。

第三个和。设 $k = r-1$：

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r-1}}{10^{r-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{10^k} = F_0 + S_n - \frac{F_n}{10^n}.$$

从第一个和减去第二和第三个和，得

$$(100 - 10 - 1)S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} = 89S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}},$$

这就是所求的结果。

第 (iii) 部分

把 (ii) 左边的三个和合并成一个。它的第 r 项是 $(F_{r+1} - F_r - F_{r-1})/10^{r-1} = 0$，所以左边等于零。代入 $F_0 = 0$ 和 $F_1 = 1$，得

$$89S_n = 10 - \frac{F_n}{10^n} - \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}. \qquad (*)$$

? **想一想** 我们怎样知道当 $n \to \infty$ 时，剩下的两项会趋于零?

这正是第 (i) 部分发挥作用的地方。在那里取 $n = 1$，得对所有 $r \geq 1$ 都有 $F_r \leq 2^{r-1}$，所以

$$0 \leq \frac{F_n}{10^n} \leq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5}\Big)^n, \qquad 0 \leq \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} \leq \frac{2^n}{10^{n-1}} = 10\Big(\frac{1}{5}\Big)^n,$$

而两个上界都趋于 0。在 $(*)$ 中令 $n \to \infty$，得 $89S_n \to 10$，即

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} = \frac{10}{89}.$$

至于尾项，在第 (i) 部分中取 $n = 7$（注意 $F_7 = 13$）：对 $r \geq 7$，有 $F_r \leq 2^{r-7} \cdot 13$，所以

$$\sum_{r=7}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} \leq \frac{13}{10^7} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{10^j} = \frac{13}{10^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{65}{4} \times 10^{-7} = 1.625 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}.$$

$\frac{1}{89}$ 的各位数字。首六项之和为

$$S_6 = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 = 0.112358.$$

尾项 $T = \frac{10}{89} - S_6$ 严格大于零（因为它的各项都是正数），而且小于 2×10^{-6}，所以

$$0.112358 < \frac{10}{89} < 0.112360, \qquad \text{因此} \qquad 0.0112358 < \frac{1}{89} < 0.0112360.$$

严格介于这两个界之间的每个数都以 0.011235… 开头，所以 $\frac{1}{89}$ 小数点后的首六位数字是 $0, 1, 1, 2, 3, 5$。严格的下界很重要：它排除了展开式是 0.0112357… 的可能。

第 (iv) 部分

把目标数在开头的 00 之后两位两位地读：

$$0.00\ 01\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ 34\ 55\ldots$$

这些两位数组正是 $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$，每个都写成两位数字。所以这个数应该是 $\frac{1}{100}U$，其中

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{100^r}.$$

*求 U 的和。*由第 (i) 部分得 $F_r \le 2^{r-1}$，所以这个级数绝对收敛（converges absolutely）。因此我们可以像 (ii) 一样，逐项平移和合并收敛级数：

$$U - \frac{U}{100} - \frac{U}{100^2} = \frac{F_1}{100} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{F_r - F_{r-1} - F_{r-2}}{100^r} = \frac{1}{100}.$$

这里 $r = 1$ 的项是 $F_1/100$（因为 $F_0 = 0$），而之后每个括号都等于零。所以 $U \cdot \frac{9899}{10000} = \frac{1}{100}$，得 $U = \frac{100}{9899}$。因此候选答案是

$$\frac{U}{100} = \frac{1}{9899},$$

其中 $r = 1$、$s = 9899$，两者都是小于 10000 的正整数。

*验证各位数字。*设 U_{10} 为首十项之和。由于 $F_1, \ldots, F_{10}$ 每个都小于 100，各项不会互相重叠，而且

$$U_{10} = 0.01010203050813213455$$

恰好成立，共有 20 位小数。由第 (i) 部分取 $n = 11$（且 $F_{11} = 89$），余下各项满足

$$0 < U - U_{10} \le \frac{89}{100^{11}} \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\frac{2}{100}\Big)^j = \frac{89}{10^{22}} \cdot \frac{100}{98} < 10^{-20}.$$

所以 $U_{10} < U < U_{10} + 10^{-20}$，$U$ 的首 20 位小数就是 U_{10} 的那些数字。除以 100 会把这些数字向右移两位：

$$\frac{1}{9899} = 0.0001010203050813213455\ldots,$$

这正是所要求的开头。

验算

- 用长除法（long division）得 $1/89 = 0.011235955\ldots$。数字 011235 吻合，而接下来的数字 9,5,5 显示斐波那契数一旦达到两位数，就会互相“进位”。
- (iii) 中 $r = 6$ 之后的尾项实际上是 $10/89 - 0.112358 \approx 1.55 \times 10^{-6}$，稳稳低于我们的上界 1.625×10^{-6}。
- 用电脑把 $1/9899$ 计算到 22 位小数，得 0.0001010203050813213455。下一组两位数是 90 而不是 $F_{11} = 89$，因为 $F_{12} = 144$ 超出了它的两位数位置，向前一组进位 1。

常见错误

- 在 (ii) 重新编排下标时把边界项弄错。把每个平移后的和的首项和末项写出来，就可以避免。
- 在 (iii) 中没有证明 $F_n/10^n$ 和 $F_{n+1}/10^{n-1}$ 趋于零。第 (i) 部分正是为此而设的。
- 忘记尾项是*严格*大于零的。单靠一个上界并不能确定第六位数字。

STEP 之外

函数 $G(x) = \sum F_r x^r$ 是斐波那契数的*生成函数*，而上面的平移论证说明，当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时 $G(x) = x/(1 - x - x^2)$。代入 $x = \frac{1}{10}$ 和 $x = \frac{1}{100}$，便得到 $\frac{10}{89}$ 和 $\frac{100}{9899}$。生成函数把递推关系转化为代数运算，是组合数学（combinatorics）的核心工具。Herbert Wilf 的 *generatingfunctionology*（《生成函数学》）是一本生动的入门书。要严格地处理“重新排列收敛级数”，属于大学一年级分析（analysis）课程的内容：可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。